

Regressão Linear Múltipla

II.2. Regressão Linear Múltipla

Por vezes, é necessária **mais do que uma variável preditora** para modelar adequadamente a variável resposta de interesse.

Plano em \mathbb{R}^3

Qualquer plano em \mathbb{R}^3 , no sistema $xOyOz$, tem equação

$$Ax + By + Cz + D = 0 .$$

No nosso contexto, e colocando:

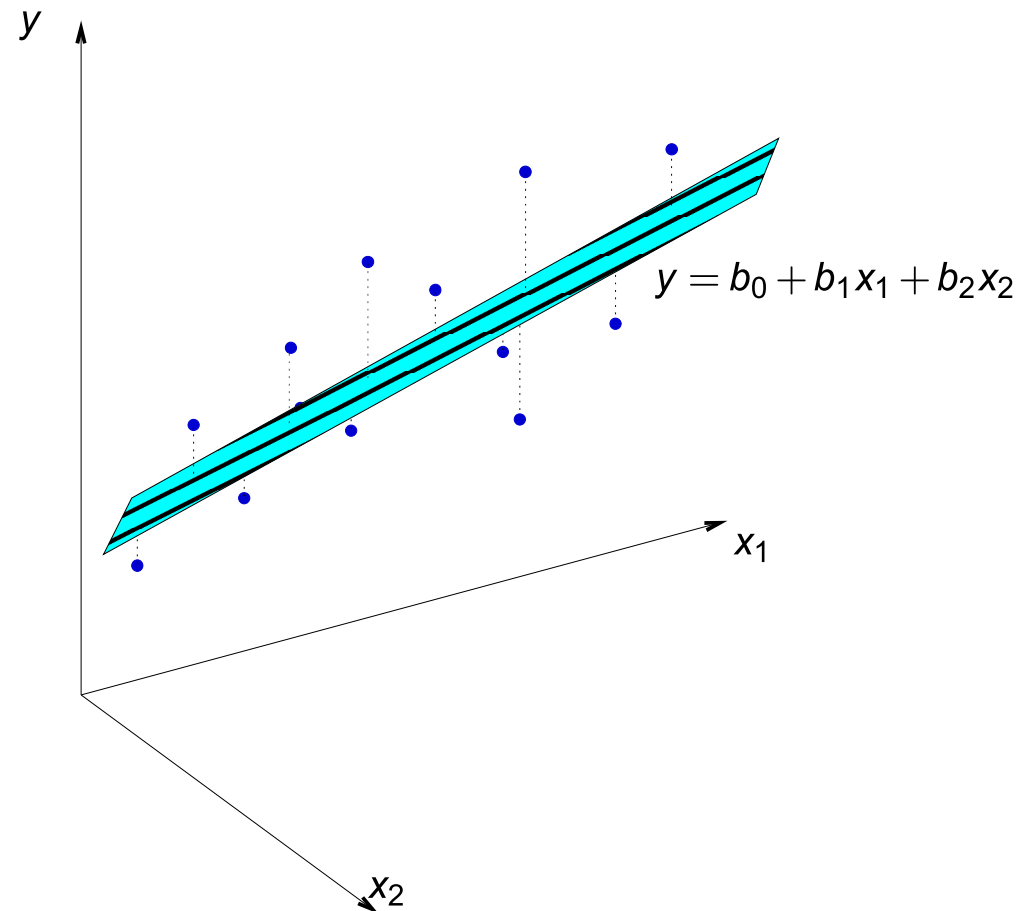
- no eixo vertical (z) a variável resposta Y ;
- noutro eixo (x) um preditor X_1 ;
- no terceiro eixo (y) o outro preditor X_2 ,

A equação fica (no caso geral de planos não verticais, com $C \neq 0$):

$$\begin{aligned} Ax_1 + Bx_2 + Cy + D = 0 &\Leftrightarrow y = -\frac{D}{C} - \frac{A}{C}x_1 - \frac{B}{C}x_2 \\ &\Leftrightarrow y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 \end{aligned}$$

Esta equação generaliza a equação da recta, para o caso de haver dois preditores.

Regressão Múltipla - representação gráfica ($p = 2$)



$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ é a equação dum **plano em \mathbb{R}^3** (x_1, x_2, y).

Pode ser ajustado pelo mesmo critério que na RLS: minimizar SQRE.

O caso geral: p preditores

Para modelar uma variável resposta Y com base numa regressão linear sobre p variáveis preditoras, x_1, x_2, \dots, x_p , admite-se que os valores de Y oscilam em torno duma combinação linear (afim) das p variáveis preditoras:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_px_p .$$

Trata-se da equação dum hiperplano em \mathbb{R}^{p+1} , que define a relação de fundo entre y e os p preditores.

Tal como na Regressão Linear Simples, admite-se que dispomos de n conjuntos de observações para ajustar este hiperplano:

$$\left\{ (x_{1(i)}, x_{2(i)}, \dots, x_{p(i)}, y_i) \right\}_{i=1}^n .$$

Não é possível visualizar a nuvem de pontos das observações se $p > 2$.

O caso geral: valores ajustados e resíduos

O hiperplano $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_px_p$ serve para obter **valores ajustados** \hat{y}_i , para cada uma das n observações:

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1x_{1(i)} + b_2x_{2(i)} + \dots + b_px_{p(i)}$$

Definem-se de forma igual os **resíduos** associados a cada observação:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

A **Soma de Quadrados dos Resíduos** também se define de forma idêntica:

$$SQRE = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Os **parâmetros** b_j do hiperplano ajustado deverão **minimizar SQRE**.

As dificuldades na representação gráfica

A **representação gráfica usual** da nuvem de n pontos observados **exige $p + 1$ eixos**: um para y e um para cada um dos p preditores.

Para $p > 2$, são necessários mais de três eixos e **a visualização torna-se impossível**.

As características fundamentais da representação usual são:

- $p + 1$ eixos – um para cada **variável** em questão.
- n pontos – um para cada **indivíduo (unidade experimental)** observado.
- Tem-se uma **nuvem de n pontos num espaço $(p + 1)$ -dimensional**.

Mas esta representação gráfica em \mathbb{R}^{p+1} das n observações não é a única possível.

Outra representação gráfica

Há **outra representação possível** dos dados, que **casa** conceitos geométricos e conceitos estatísticos e é útil na determinação dos parâmetros ajustados.

As n observações de y definem um **vector em \mathbb{R}^n** :

$$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n).$$

Da mesma forma, as n observações de cada variável preditora definem um **vector de \mathbb{R}^n** .

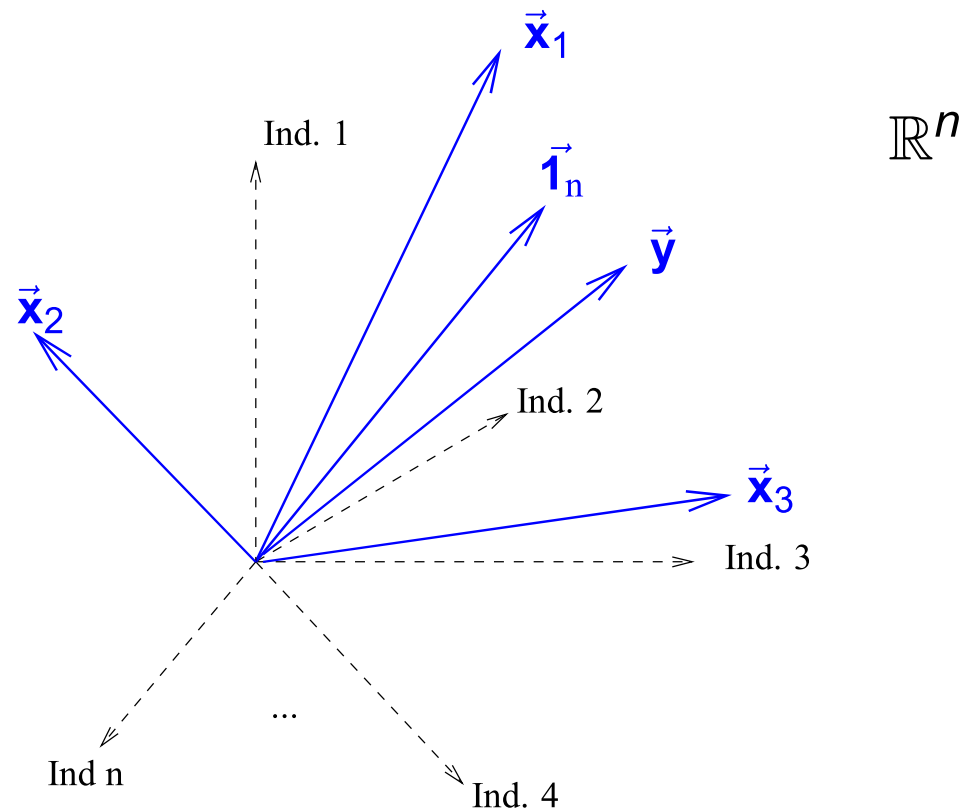
$$\vec{x}_j = (x_{j(1)}, x_{j(2)}, x_{j(3)}, \dots, x_{j(n)}) \quad (j = 1, 2, \dots, p).$$

Podemos representar todas as variáveis por vectores **em \mathbb{R}^n** .

A representação em \mathbb{R}^n , o espaço das variáveis

- cada **eixo** corresponde a um **indivíduo** observado;
- cada **vector** corresponde a uma **variável**.

O vector de n uns, representado por $\vec{\mathbf{1}}_n$, também é útil.



Vantagens da representação gráfica alternativa

Os n valores ajustados \hat{y}_i também definem um vector de \mathbb{R}^n que é uma combinação linear dos vectores $\vec{\mathbf{1}}_n, \vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \dots, \vec{\mathbf{x}}_p$:

$$\vec{\hat{\mathbf{y}}} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 + b_1 x_{1(1)} + b_2 x_{2(1)} + \dots + b_p x_{p(1)} \\ b_0 + b_1 x_{1(2)} + b_2 x_{2(2)} + \dots + b_p x_{p(2)} \\ b_0 + b_1 x_{1(3)} + b_2 x_{2(3)} + \dots + b_p x_{p(3)} \\ \dots \\ b_0 + b_1 x_{1(n)} + b_2 x_{2(n)} + \dots + b_p x_{p(n)} \end{bmatrix}$$

$$= b_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} x_{1(1)} \\ x_{1(2)} \\ x_{1(3)} \\ \vdots \\ x_{1(n)} \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} x_{2(1)} \\ x_{2(2)} \\ x_{2(3)} \\ \vdots \\ x_{2(n)} \end{bmatrix} + \dots + b_p \begin{bmatrix} x_{p(1)} \\ x_{p(2)} \\ x_{p(3)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{bmatrix}$$

$$= b_0 \vec{\mathbf{1}}_n + b_1 \vec{\mathbf{x}}_1 + b_2 \vec{\mathbf{x}}_2 + \dots + b_p \vec{\mathbf{x}}_p$$

$\vec{\hat{\mathbf{y}}}$ é uma combinação linear dos $p+1$ vectors $\vec{\mathbf{1}}_n, \vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \dots, \vec{\mathbf{x}}_p$.

A matriz do modelo \mathbf{X}

- O conjunto de **todas** as combinações lineares dos vectores $\vec{\mathbf{1}}_n, \vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_p$ chama-se o **subespaço gerado** por esses vectores
Recordar: UC Álgebra Linear dos primeiros ciclos do ISA.
- O vector $\vec{\mathbf{y}}$ pertence ao subespaço gerado pelos vectores $\vec{\mathbf{1}}_n, \vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_p$.
- Define-se a **matriz do modelo \mathbf{X}** como a matriz cujas **colunas** são os vectores $\vec{\mathbf{1}}_n, \vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_p$.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1(1)} & x_{2(1)} & \cdots & x_{p(1)} \\ 1 & x_{1(2)} & x_{2(2)} & \cdots & x_{p(2)} \\ 1 & x_{1(3)} & x_{2(3)} & \cdots & x_{p(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1(n)} & x_{2(n)} & \cdots & x_{p(n)} \end{bmatrix} .$$

É uma matriz de dimensão $n \times (p + 1)$.

O subespaço de colunas de \mathbf{X}

- O subespaço gerado pelos vectores colunas da matriz do modelo \mathbf{X} chama-se o **subespaço das colunas de \mathbf{X}** e representa-se por $\mathcal{C}(\mathbf{X})$.
- O vector $\vec{\hat{\mathbf{y}}}$ pertence ao subespaço $\mathcal{C}(\mathbf{X})$
(as colunas de \mathbf{X} são os vectores $\vec{\mathbf{1}}_n, \vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_p$).
- $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ é um subespaço de \mathbb{R}^n ($\mathcal{C}(\mathbf{X}) \subset \mathbb{R}^n$), mas de **dimensão $p + 1$**
(se as colunas de \mathbf{X} forem **linearmente independentes**, isto é, se nenhum vector se puder escrever como combinação linear dos restantes).
- Qualquer combinação linear das colunas da matriz \mathbf{X} , ou seja, **qualquer elemento de $\mathcal{C}(\mathbf{X})$** se pode escrever como $\mathbf{X}\vec{\mathbf{a}}$, onde $\vec{\mathbf{a}} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)$ é o vector dos coeficientes da combinação linear.

Os parâmetros

- Um dos pontos/vectores do subespaço é a combinação linear dada pelo vector de coeficientes $\vec{\mathbf{b}} = (b_0, b_1, \dots, b_p)$ que minimiza:

$$SQRE = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

onde os y_i são os valores observados da variável resposta e $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{1(i)} + b_2 x_{2(i)} + \dots + b_p x_{p(i)}$ os **valores ajustados**. É a combinação linear que desejamos determinar.

Como identificar esse ponto/vector?

Geometria

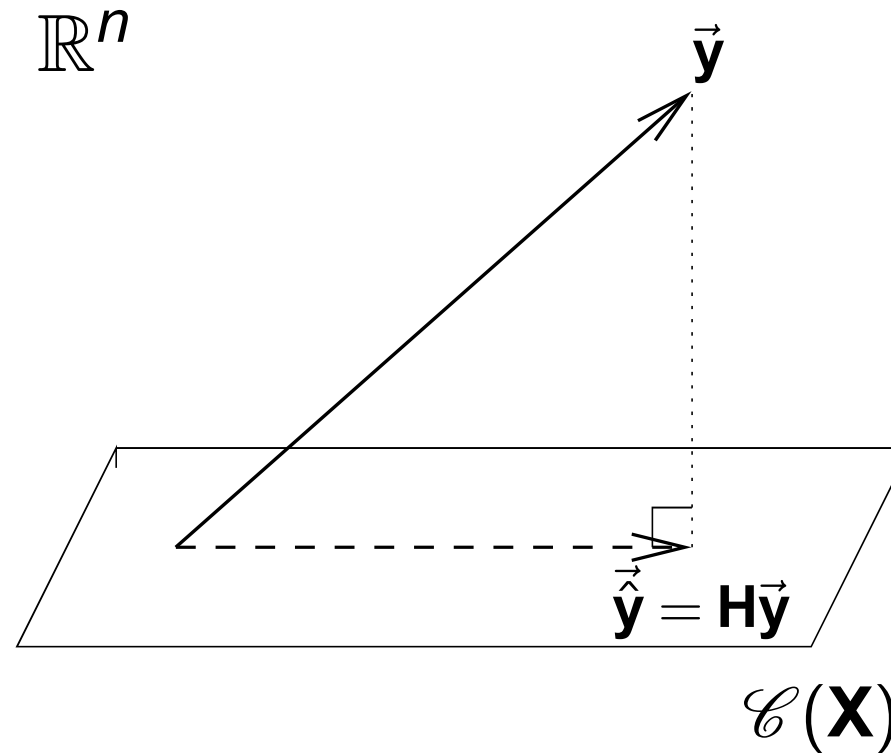
Vamos usar argumentos geométricos.

- Dispomos de um vector de n observações de \vec{y} que está em \mathbb{R}^n mas, em geral, **não está no subespaço $\mathcal{C}(\mathbf{X})$** .
- Queremos aproximar esse vector por outro vector, $\vec{\hat{y}} = b_0 \vec{1}_n + b_1 \vec{x}_1 + \dots + b_p \vec{x}_p$, que **está no subespaço $\mathcal{C}(\mathbf{X})$** .
- Vamos aproximar o vector de observações \vec{y} pelo vector $\vec{\hat{y}}$ do subespaço $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ que esteja **mais próximo de \vec{y}** .

SOLUÇÃO:

Tomar a **projecção ortogonal** de \vec{y} sobre $\mathcal{C}(\mathbf{X})$: $\vec{\hat{y}} = \mathbf{H}\vec{y}$.

A projecção ortogonal de \vec{y} sobre $\mathcal{C}(\mathbf{X})$



O vector de $\mathcal{C}(\mathbf{X}) \subset \mathbb{R}^n$ mais próximo dum vector $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ é o vector $\hat{\vec{y}}$ que resulta de projectar ortogonalmente \vec{y} sobre $\mathcal{C}(\mathbf{X})$.

O critério minimiza *SQRE*

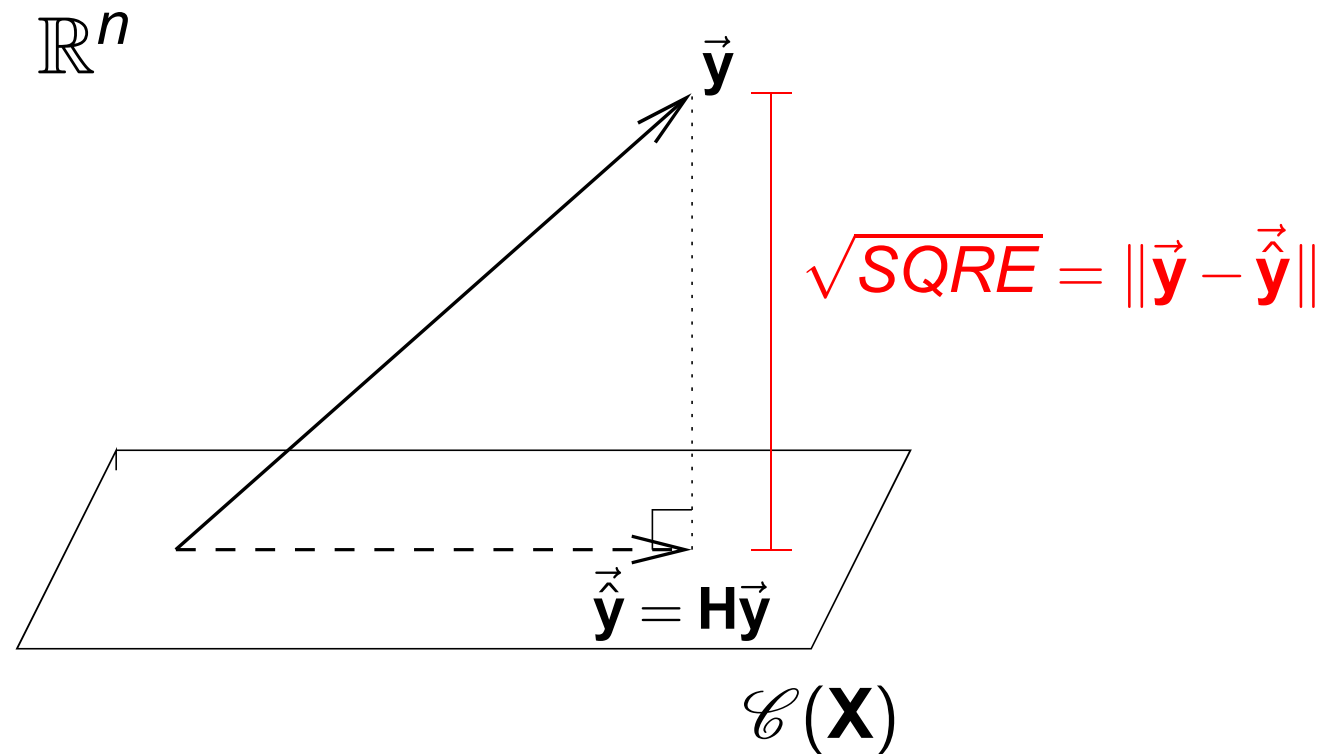
O vector $\vec{\hat{y}}$ que minimiza a distância ao vector de observações \vec{y} minimiza também o **quadrado dessa distância**, que é dado por:

$$\text{dist}^2(\vec{y}, \vec{\hat{y}}) = \|\vec{y} - \vec{\hat{y}}\|^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \text{SQRE} .$$

Ou seja, o critério **minimiza a soma de quadrados dos resíduos**.

Trata-se do mesmo critério que foi usado na Regressão Linear Simples.

SQRE na projecção ortogonal



O quadrado da distância de \vec{y} a $\vec{\hat{y}}$ é *SQRE*, a soma dos quadrados dos resíduos.

A projecção ortogonal

Um vector $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ projecta-se ortogonalmente sobre o subespaço $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ pré-multiplicando \vec{y} pela **matriz de projecção ortogonal sobre $\mathcal{C}(\mathbf{X})$** :

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t.$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned}\hat{\vec{y}} &= \mathbf{H}\vec{y} \\ \Leftrightarrow \hat{\vec{y}} &= \underbrace{\mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t}_{=\vec{b}}\vec{y}\end{aligned}$$

A combinação linear dos vectores $\vec{1}_n, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$ que gera o vector mais próximo de \vec{y} tem coeficientes dados pelos elementos do vector \vec{b} :

Os parâmetros ajustados na RL Múltipla

$$\vec{b} = (\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\vec{y}.$$

As três Somas de Quadrados

Na Regressão Linear Múltipla definem-se três Somas de Quadrados, de forma idêntica ao que se fez na Regressão Linear Simples:

SQRE – Soma de Quadrados dos Resíduos (já definida):

$$SQRE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 .$$

SQT – Soma de Quadrados Total:

$$SQT = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 .$$

SQR – Soma de Quadrados associada à Regressão:

$$SQR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2 - n\bar{y}^2 .$$

$$SQT = SQR + SQRE$$

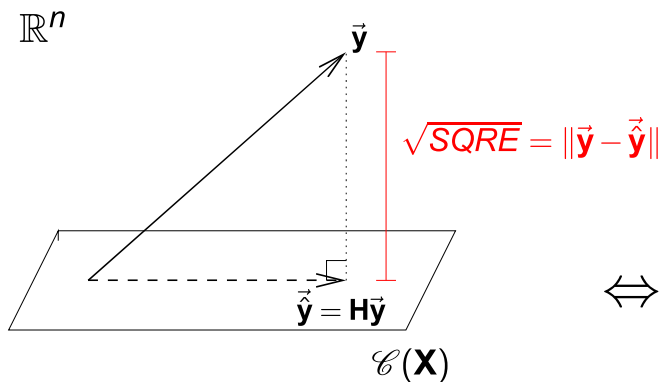
Nota: Também na RL Múltipla os y observados (y_i) e os y ajustados (\hat{y}_i) têm a mesma média (ver Exercício RLM 4).

O Coeficiente de Determinação na Regressão Linear, $R^2 = \frac{SQR}{SQT}$

Pitágoras e a Regressão

O **Teorema de Pitágoras** aplica-se em qualquer espaço euclidiano \mathbb{R}^n .

Aplicado ao triângulo rectângulo do acetato 156 tem-se:




$$\|\vec{y}\|^2 = \|\vec{\hat{y}}\|^2 + \|\vec{y} - \vec{\hat{y}}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}_{= SQRE}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2 - n\bar{y}^2 + SQRE$$

$$\Leftrightarrow SQT = SQR + SQRE$$

A Regressão Múltipla no

Uma Regressão Múltipla no  estuda-se através do mesmo comando `lm` usado para a regressão linear simples. A indicação de qual a variável resposta y e quais as variáveis preditoras x_1, \dots, x_p faz-se de forma semelhante à da RLS.

Por exemplo, se a variável resposta se chama y e existirem três preditores de nome x_1 , x_2 e x_3 , a fórmula que indica a relação será:

$$y \sim x_1 + x_2 + x_3$$

O comando correspondente no R será:

```
> lm ( y ~ x1 + x2 + x3 , data=dados)
```

Este comando mostra o **vector das estimativas dos $p + 1$ parâmetros do modelo, b_0, b_1, \dots, b_p .**

A Regressão Múltipla no (cont.)

O exemplo dos lírios (*iris*, Ex. RLM 7)

Pretende-se modelar a variável resposta largura da pétala, não apenas com base no comprimento da pétala, mas também das duas medições (largura e comprimento) das sépalas.

```
> iris2.lm <- lm(Petal.Width ~ Petal.Length + Sepal.Length +  
+ Sepal.Width , data=iris)
```

```
> iris2.lm
```

```
(...)
```

Coefficients:

(Intercept)	Petal.Length	Sepal.Length	Sepal.Width
-0.2403	0.5241	-0.2073	0.2228

O hiperplano ajustado é:

$$PW = -0.2403 + 0.5241 PL - 0.2073 SL + 0.2228 SW$$

O coeficiente de determinação é $R^2 = 0.9379$, ligeiramente maior que o valor $R^2 = 0.9271$ do modelo de regressão linear simples.

Algumas propriedades dos hiperplanos ajustados

Numa regressão linear múltipla verifica-se:

- a média dos valores observados de Y , $\{y_i\}_{i=1}^n$, é igual à média dos respectivos valores ajustados, $\{\hat{y}_i\}_{i=1}^n$ (ver Exercício RLM 4c).
- O hiperplano ajustado em \mathcal{R}^{p+1} contém o centro de gravidade da nuvem de pontos, i.e., o ponto de coordenadas $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p, \bar{y})$:

$$\bar{y} = \bar{\hat{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{(b_0 + b_1 x_{1(i)} + b_2 x_{2(i)} + \dots + b_p x_{p(i)})}_{=\hat{y}_i} = b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + \dots + b_p \bar{x}_p$$

- o coeficiente b_j que multiplica o preditor X_j é a variação média em Y , associada a aumentar X_j em 1 unidade, **mantendo os restantes preditores constantes**.
- o valor de R^2 numa regressão múltipla não pode ser inferior ao valor de R^2 que se obteria excluindo do modelo um qualquer subconjunto de preditores. Em particular, não pode ser inferior ao R^2 das regressões lineares simples de Y sobre cada preditor individual.

O contexto inferencial

Até aqui, apenas se considerou o **problema descritivo**: dados n conjuntos de observações $\{(x_{1(i)}, x_{2(i)}, \dots, x_{p(i)}, y(i))\}_{i=1}^n$, determinar os $p + 1$ coeficientes $\vec{\mathbf{b}} = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_p)$ que minimizam a soma de quadrados de resíduos

$$SQRE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (b_0 + b_1 x_{1(i)} + b_2 x_{2(i)} + \dots + b_p x_{p(i)})]^2$$

$$\Rightarrow \text{SQRE mínimo se } \vec{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \vec{\mathbf{y}}.$$

Tal como na RL Simples, coloca-se o **problema inferencial** quando as n observações são uma **amostra aleatória** duma população mais vasta. É o **hiperplano populacional** em \mathbb{R}^{p+1} , relacionando y e as p variáveis preditoras, que se pretende conhecer:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p$$

Para esse fim, será necessário **admitir alguns pressupostos adicionais**.

O Modelo RLM

Na Regressão Linear Múltipla admite-se que as n observações da variável resposta Y são aleatórias, mas os valores das variáveis preditoras não:

$$\{(x_{1(i)}, x_{2(i)}, \dots, x_{p(i)}, Y_{(i)})\}_{i=1}^n$$

Admitem-se válidos pressupostos semelhantes aos do modelo RLS:

O Modelo da Regressão Linear Múltipla - RLM

- 1 $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots + \beta_p x_{p(i)} + \varepsilon_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$
- 2 $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \forall i = 1, \dots, n.$
- 3 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ v.a. independentes.

A constante β_j ($j = 1, 2, \dots, p$) que multiplica a variável X_j é a **variação esperada em Y , associada a aumentar X_j em uma unidade, mantendo os restantes preditores constantes.**

A notação matricial/vectorial

As n equações, para as n observações, podem ser escritas como **uma única equação**, utilizando notação vectorial/matricial:

$$\begin{array}{rccccccc} Y_1 & = & \beta_0 + \beta_1 x_{1(1)} + \beta_2 x_{2(1)} + \cdots + \beta_p x_{p(1)} & + & \varepsilon_1 \\ Y_2 & = & \beta_0 + \beta_1 x_{1(2)} + \beta_2 x_{2(2)} + \cdots + \beta_p x_{p(2)} & + & \varepsilon_2 \\ Y_3 & = & \beta_0 + \beta_1 x_{1(3)} + \beta_2 x_{2(3)} + \cdots + \beta_p x_{p(3)} & + & \varepsilon_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underbrace{Y_n}_{=\vec{Y}} & = & \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_{1(n)} + \beta_2 x_{2(n)} + \cdots + \beta_p x_{p(n)}}_{=\mathbf{x}\vec{\beta}} & + & \underbrace{\varepsilon_n}_{=\vec{\varepsilon}} \end{array}$$

A notação matricial (cont.)

A equação matricial/vectorial do modelo

As n equações correspondem a **uma única equação matricial**:

$$\vec{Y} = \mathbf{X}\vec{\beta} + \vec{\varepsilon},$$

onde

$$\vec{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1(1)} & x_{2(1)} & \cdots & x_{p(1)} \\ 1 & x_{1(2)} & x_{2(2)} & \cdots & x_{p(2)} \\ 1 & x_{1(3)} & x_{2(3)} & \cdots & x_{p(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1(n)} & x_{2(n)} & \cdots & x_{p(n)} \end{bmatrix}, \vec{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}, \vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

A notação matricial (cont.)

Na equação matricial $\vec{Y} = \mathbf{X}\vec{\beta} + \vec{\varepsilon}$, tem-se:

- \vec{Y} – **vector aleatório** das n variáveis aleatórias **resposta**;
- \mathbf{X} – **matriz do modelo** (**não aleatória**) de dimensões $n \times (p + 1)$ cujas colunas são dadas pelas observações de cada variável preditora (e por uma coluna de uns, associada a constante aditiva do modelo);
- $\vec{\beta}$ – **vector** (**não aleatório**) dos $p + 1$ **parâmetros do modelo**;
- $\vec{\varepsilon}$ – **vector aleatório** dos n **erros aleatórios**.

Com alguns **conceitos adicionais** podemos escrever também os pressupostos relativos aos erros aleatórios em notação vectorial/matricial.

Ferramentas para vectores aleatórios

O vector \vec{Y} e o vector $\vec{\varepsilon}$ são **vectores aleatórios**. Vamos definir ferramentas para trabalhar com vectores aleatórios.

Vector esperado

Para qualquer **vector aleatório** $\vec{W} = (W_1, W_2, \dots, W_k)^t$, define-se o **vector esperado** de \vec{W} como sendo o vector dos **valores esperados** de cada componente:

$$E[\vec{W}] = \begin{bmatrix} E[W_1] \\ E[W_2] \\ \vdots \\ E[W_k] \end{bmatrix} .$$

Ferramentas para vectores aleatórios (cont.)

Matriz de variâncias-covariâncias de \vec{W}

É a matriz $k \times k$ cujos elementos são as (co-)variâncias de cada par de componentes:

$$V[\vec{W}] = \begin{bmatrix} V[W_1] & C[W_1, W_2] & C[W_1, W_3] & \dots & C[W_1, W_k] \\ C[W_2, W_1] & V[W_2] & C[W_2, W_3] & \dots & C[W_2, W_k] \\ C[W_3, W_1] & C[W_3, W_2] & V[W_3] & \dots & C[W_3, W_k] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C[W_k, W_1] & C[W_k, W_2] & C[W_k, W_3] & \dots & V[W_k] \end{bmatrix}$$

É necessariamente uma **matriz simétrica**.

Propriedades do vector esperado

Propriedades de vectores esperados

Tal como para o caso de variáveis aleatórias, também o vector esperado de um vector aleatório $\vec{\mathbf{W}}_{k \times 1}$ tem propriedades simples:

- Se b é um escalar não aleatório, $E[b\vec{\mathbf{W}}] = b E[\vec{\mathbf{W}}]$.
- Se $\vec{\mathbf{a}}_{k \times 1}$ é um vector não aleatório, $E[\vec{\mathbf{W}} + \vec{\mathbf{a}}] = E[\vec{\mathbf{W}}] + \vec{\mathbf{a}}$.
- Se $\vec{\mathbf{a}}_{k \times 1}$ é um vector não aleatório, $E[\vec{\mathbf{a}}^t \vec{\mathbf{W}}] = \vec{\mathbf{a}}^t E[\vec{\mathbf{W}}]$.
- Se $\mathbf{B}_{m \times k}$ é uma matriz não aleatória, $E[\mathbf{B}\vec{\mathbf{W}}] = \mathbf{B} E[\vec{\mathbf{W}}]$.

Também o vector esperado da soma de dois vectors aleatórios tem uma propriedade operatória simples:

- Se $\vec{\mathbf{W}}_{k \times 1}$, $\vec{\mathbf{U}}_{k \times 1}$ são vectores aleatórios, $E[\vec{\mathbf{W}} + \vec{\mathbf{U}}] = E[\vec{\mathbf{W}}] + E[\vec{\mathbf{U}}]$.

Propriedades da matriz de (co)variâncias

Propriedades de matrizes de (co-)variâncias

Eis algumas propriedades operatórias das matrizes de variâncias-covariâncias de vectores aleatórios:

- Se b é um escalar não aleatório, $V[b\vec{W}] = b^2 V[\vec{W}]$.
- Se $\vec{a}_{k \times 1}$ é um vector não aleatório, $V[\vec{W} + \vec{a}] = V[\vec{W}]$.
- Se $\vec{a}_{k \times 1}$ é um vector não aleatório, $V[\vec{a}^t \vec{W}] = \vec{a}^t V[\vec{W}] \vec{a}$.
- Se $\mathbf{B}_{m \times k}$ é uma matriz não aleatória, $V[\mathbf{B}\vec{W}] = \mathbf{B} V[\vec{W}] \mathbf{B}^t$.

A matriz de variâncias-covariâncias da soma de dois vectores aleatórios tem uma propriedade operatória simples se os vectores aleatórios forem independentes:

- Se $\vec{W}_{k \times 1}$ e $\vec{U}_{k \times 1}$ forem vectores aleatórios independentes, $V[\vec{W} + \vec{U}] = V[\vec{W}] + V[\vec{U}]$.

A distribuição Normal Multivariada

Vectores aleatórios têm também distribuições (multivariadas) de probabilidades. Para vectores aleatórios contínuos $\vec{\mathbf{W}}_{k \times 1}$, a distribuição pode ser caracterizada por uma função densidade conjunta $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$.

A mais frequente distribuição multivariada para vectores aleatórios é a **Multinormal**:

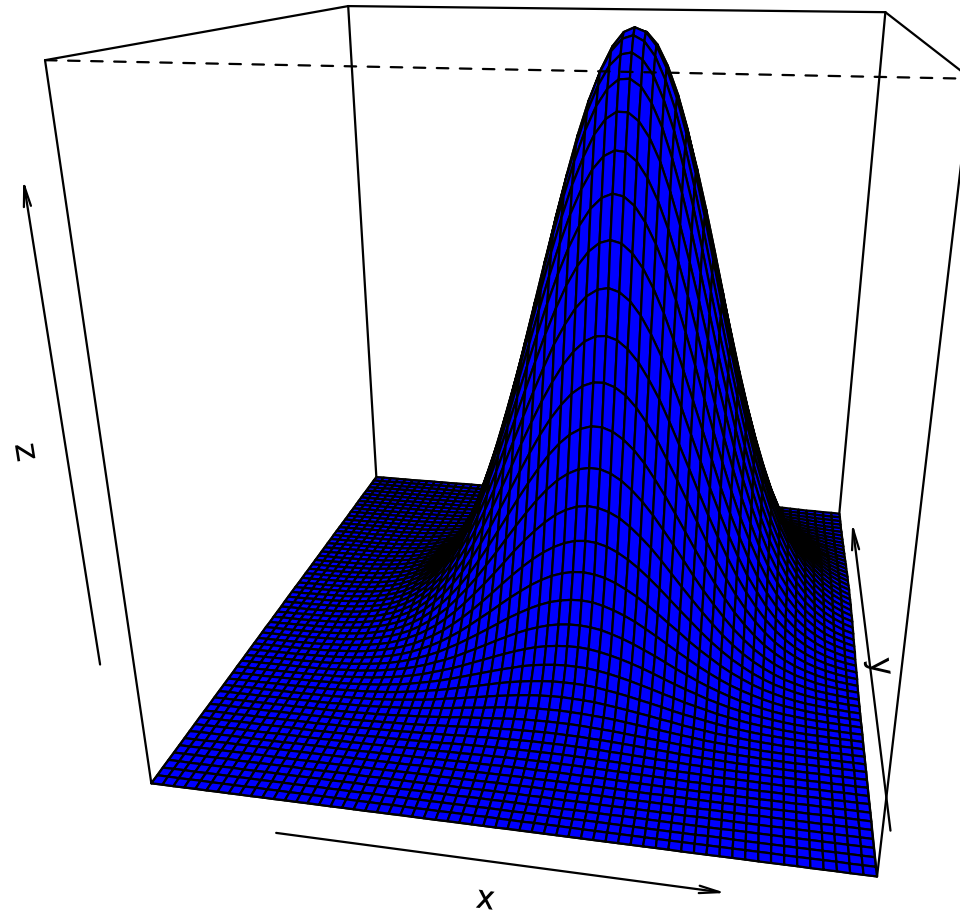
Distribuição Normal Multivariada

O vector aleatório k -dimensional $\vec{\mathbf{W}}$ tem **distribuição Multinormal**, com **parâmetros** dados pelo vector $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ e a matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ se a sua função densidade conjunta for:

$$f(\vec{\mathbf{w}}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{\mathbf{w}} - \vec{\boldsymbol{\mu}})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\vec{\mathbf{w}} - \vec{\boldsymbol{\mu}})}, \quad \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^k. \quad (1)$$

Notação: $\vec{\mathbf{W}} \sim \mathcal{N}_k(\vec{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\Sigma})$.

A densidade Binormal (Multinormal com $k = 2$)



Algumas propriedades da distribuição Multinormal

Propriedades da distribuição Multinormal

Se $\vec{W} \sim \mathcal{N}_k(\vec{\mu}, \Sigma)$:

- 1 O vector esperado de \vec{W} é $E[\vec{W}] = \vec{\mu}$.
- 2 A matriz de (co)variâncias de \vec{W} é $V[\vec{W}] = \Sigma$.
- 3 Se duas componentes de \vec{W} têm covariância nula, são independentes: $Cov[W_i, W_j] = 0 \implies W_i, W_j$ independentes.

Nota: Em geral, X, Y independentes $\implies cov[X, Y] = 0$.

Quando a distribuição conjunta de X e Y é Multinormal, tem-se também a implicação contrária.

Nota: Qualquer zero numa matriz de (co)variâncias duma Multinormal indica que as componentes correspondentes são independentes.

Propriedades da Multinormal (cont.)

Propriedades da Multinormal (cont.)

Se $\vec{W} \sim \mathcal{N}_k(\vec{\mu}, \Sigma)$:

- 4 Qualquer distribuição marginal de \vec{W} é (multi)normal.
Em particular, cada componente individual W_i é normal com média μ_i e variância $\Sigma_{(i,i)}$: $W_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \Sigma_{(i,i)})$.
- 5 Se \vec{a} um vector não-aleatório $k \times 1$, então $\vec{W} + \vec{a} \sim \mathcal{N}_k(\vec{\mu} + \vec{a}, \Sigma)$.
- 6 Combinações lineares das componentes dum vector multinormal são Normais: $\vec{a}^t \vec{W} = a_1 W_1 + a_2 W_2 + \dots + a_k W_k \sim \mathcal{N}(\vec{a}^t \vec{\mu}, \vec{a}^t \Sigma \vec{a})$.
- 7 Se \mathbf{B} é matriz $m \times k$ (não aleatória, de característica $m \leq k$), então $\mathbf{B}\vec{W} \sim \mathcal{N}_m(\mathbf{B}\vec{\mu}, \mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}^t)$.

Modelo Regressão Linear Múltipla - versão matricial

O Modelo em notação vectorial/matricial

1 $\vec{Y} = \mathbf{X}\vec{\beta} + \vec{\varepsilon}.$

2 $\vec{\varepsilon} \sim \mathcal{N}_n(\vec{\mathbf{0}}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$, com $\vec{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$; $\sigma^2 \mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}$

A condição $\vec{\varepsilon} \sim \mathcal{N}_n(\vec{\mathbf{0}}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ significa que:

- Cada erro aleatório individual ε_i tem distribuição Normal.
- Cada erro aleatório individual tem média zero: $E[\varepsilon_i] = 0$.
- Cada erro aleatório individual tem variância igual: $V[\varepsilon_i] = \sigma^2$.
- Erros aleatórios são independentes, porque $Cov[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = 0$ se $i \neq j$, o que, numa Multinormal, implica a independência.

A distribuição do vector \vec{Y}

Primeiras Consequências do Modelo

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla, tem-se:

$$\vec{Y} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{X}\vec{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I}_n).$$

Sai directamente, pois \vec{Y} é da forma $\vec{W} + \vec{a}$, soma dum vector Multinormal ($\vec{W} = \vec{\varepsilon}$) com um vector não aleatório ($\vec{a} = \mathbf{X}\vec{\beta}$).

Tendo em conta as propriedades da Multinormal:

- Cada observação individual Y_i tem distribuição Normal.
- Cada observação individual Y_i tem média dada pelo elemento i do vector $\mathbf{X}\vec{\beta}$: $E[Y_i] = \beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots + \beta_p x_{p(i)}$.
- Cada observação individual Y_i tem variância igual: $V[Y_i] = \sigma^2$.
- Observações diferentes de Y são independentes, porque $\text{Cov}[Y_i, Y_j] = 0$ se $i \neq j$ o que, numa Multinormal, implica a independência.

O estimador dos parâmetros do Modelo

Os estimadores $\hat{\beta}_j$ dos parâmetros β_j do modelo obtêm-se adaptando o vector $\vec{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \vec{\mathbf{y}}$ (acetato 157) ao contexto inferencial.

Estimador dos parâmetros populacionais

O vector $\vec{\hat{\beta}}$ que estima o vector $\vec{\beta}$ dos parâmetros populacionais é:

$$\vec{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{bmatrix} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \vec{\mathbf{Y}},$$

onde \mathbf{X} é a matriz do modelo e $\vec{\mathbf{Y}}$ o vector das n observações da variável resposta (acetato 166).

Nota: O estimador de β_j está na posição $j + 1$ do vector $\vec{\hat{\beta}}$.

Nota: $\vec{\hat{\beta}}$ é da forma $\mathbf{B}\vec{\mathbf{W}}$, com $\mathbf{B} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t$ e $\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{Y}}$ (Multinormal).

A distribuição do vector de estimadores $\vec{\hat{\beta}}$

Distribuição do estimador $\vec{\hat{\beta}}$

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla, tem-se:

$$\vec{\hat{\beta}} \sim \mathcal{N}_{p+1}(\vec{\beta}, \sigma^2 (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1}).$$

- $E[\vec{\hat{\beta}}] = \vec{\beta}$ e $V[\vec{\hat{\beta}}] = \sigma^2 (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1}$.
- Cada estimador individual $\hat{\beta}_j$ tem distribuição **Normal**.
- Cada estimador individual tem média $E[\hat{\beta}_j] = \beta_j$ (logo, é **centrado**).
- Cada estimador individual tem variância $V[\hat{\beta}_j] = \sigma^2 (\mathbf{X}^t \mathbf{X})_{(j+1,j+1)}^{-1}$.
(Note-se o desfasamento nos índices).
- $Cov[\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j] = \sigma^2 (\mathbf{X}^t \mathbf{X})_{(i+1,j+1)}^{-1}$.
- Estimadores individuais **não** são (em geral) independentes, porque $(\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1}$ não é, em geral, uma matriz diagonal.

A distribuição dum estimador individual

Como se viu no acetato anterior, tem-se, $\forall j = 0, 1, \dots, p$:

$$\hat{\beta}_j \sim \mathcal{N}\left(\beta_j, \sigma^2 (\mathbf{X}^t \mathbf{X})_{(j+1, j+1)}^{-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sigma_{\hat{\beta}_j}} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

onde $\sigma_{\hat{\beta}_j} = \sqrt{\sigma^2 (\mathbf{X}^t \mathbf{X})_{(j+1, j+1)}^{-1}}$.

Este resultado generaliza os relativos à Regressão Linear Simples.

O problema de σ^2 desconhecido

O resultado do acetato anterior permitiria construir intervalos de confiança e fazer testes a hipóteses sobre os parâmetros β_j se fosse conhecida a **variância σ^2 dos erros aleatórios**.

Mas esta é, em geral, desconhecida.

Vai-se, tal como na Regressão Linear Simples:

- obter um estimador para σ^2 ; e
- ver o que acontece à distribuição do acetato anterior quando σ^2 é substituído pelo seu estimador.

O Quadrado Médio Residual na Regressão Múltipla

Quadrado Médio Residual

Define-se o **Quadrado Médio Residual** (*QMRE*) numa Regressão Linear **Múltipla** como

$$QMRE = \frac{SQRE}{n - (p + 1)}$$

- O QMRE é habitualmente usado na Regressão como estimador da variância dos erros aleatórios, isto é, toma-se

$$\hat{\sigma}^2 = QMRE .$$

- QMRE é um **estimador centrado**: $E[QMRE] = \sigma^2$.

Revisitando o estimador de β_j

Vimos (acetato 180) que para cada estimador $\hat{\beta}_j$ se tem:

$$Z = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\sigma^2 \cdot (\mathbf{X}^t \mathbf{X})_{(j+1, j+1)}^{-1}}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

De forma análoga ao que acontecia na RL Simples, tem-se:

$$T = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{QMRE \cdot (\mathbf{X}^t \mathbf{X})_{(j+1, j+1)}^{-1}}} \sim t_{n-(p+1)}.$$

Quantidades fulcrais para a inferência sobre β_j

Distribuições para a inferência sobre β_j , $j = 0, 1, \dots, p$

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla, tem-se

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \sim t_{n-(p+1)},$$

com $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} = \sqrt{QMRE \cdot (\mathbf{X}^t \mathbf{X})_{(j+1,j+1)}^{-1}}$.

Este resultado serve de base à construção de **intervalos de confiança** e **testes de hipóteses** para os parâmetros β_j do modelo populacional.

NOTA: A quantidade fulcral acima é totalmente análoga aos resultados correspondentes na RLS. Assim, **os ICs e testes de hipóteses a parâmetros individuais, na RLM, serão análogos aos da RLS.**

Intervalo de confiança para β_j

Intervalo de Confiança a $(1 - \alpha) \times 100\%$ para β_j

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla, um intervalo a $(1 - \alpha) \times 100\%$ de confiança para o parâmetro β_j do modelo é:

$$\left[b_j - t_{\frac{\alpha}{2}, [n-(p+1)]} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}, \quad b_j + t_{\frac{\alpha}{2}, [n-(p+1)]} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} \right],$$

com $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} = \sqrt{QMRE \cdot (\mathbf{X}^t \mathbf{X})_{(j+1,j+1)}^{-1}}$, e sendo $t_{\frac{\alpha}{2}, [n-(p+1)]}$ o valor que na distribuição $t_{n-(p+1)}$ deixa à *direita* uma região de probabilidade $\frac{\alpha}{2}$. O valor b_j é o elemento $j+1$ do vector das estimativas $\vec{\mathbf{b}}$ (acetato 157).

NOTA: A amplitude do IC **aumenta com o valor de $QMRE$ e o valor diagonal da matriz $(\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1}$ associado ao parâmetro β_j em questão.**

Intervalos de confiança para β_j no

ICs numa regressão múltipla com os lírios

```
> summary(iris2.lm)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-0.24031	0.17837	-1.347	0.18
Petal.Length	0.52408	0.02449	21.399	< 2e-16 ***
Sepal.Length	-0.20727	0.04751	-4.363	2.41e-05 ***
Sepal.Width	0.22283	0.04894	4.553	1.10e-05 ***

Estima-se que em média a largura da pétala diminui 0.20727cm por cada aumento de 1cm no comprimento da sépala (mantendo-se as outras medições constantes).

Como $t_{0.025(146)} = 1.976346$, o intervalo a 95% de confiança para β_2 é

$$\left[(-0.20727) - (1.976346)(0.04751), (-0.20727) + (1.976346)(0.04751) \right]$$
$$\Leftrightarrow \left[-0.3012, -0.1134 \right]$$

Intervalos de confiança para β_j no (cont.)

Alternativamente, é possível usar a função `confint`.

A função `confint` nos lírios

```
> confint(iris2.lm)
```

	2.5 %	97.5 %
(Intercept)	-0.5928277	0.1122129
Petal.Length	0.4756798	0.5724865
Sepal.Length	-0.3011547	-0.1133775
Sepal.Width	0.1261101	0.3195470

```
> confint(iris2.lm, level=0.99)
```

	0.5 %	99.5 %
(Intercept)	-0.70583864	0.22522386
Petal.Length	0.46016260	0.58800363
Sepal.Length	-0.33125352	-0.08327863
Sepal.Width	0.09510404	0.35055304

Testes de Hipóteses sobre os parâmetros

O mesmo resultado (acetato 184) usado para construir intervalos de confiança serve para construir testes a hipóteses para cada β_j individual.

Testes de Hipóteses a β_j (Regressão Linear Múltipla)

Hipóteses: $H_0 : \beta_j = c$ vs. $H_1 : \beta_j \neq c$

Estatística do Teste: $T = \frac{\hat{\beta}_j - \overbrace{\beta_j}^{=c}}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \sim t_{n-(p+1)}$ se H_0 verdade

Nível de significância do teste: α

Região Crítica (Região de Rejeição): Rejeitar H_0 se

$$|T_{calc}| > t_{\alpha/2[n-(p+1)]} \quad (\text{Bilateral})$$

Testes de Hipóteses sobre os parâmetros

O mesmo resultado (acetato 184) usado para construir intervalos de confiança serve para construir testes a hipóteses para cada β_j individual.

Testes de Hipóteses a β_j (Regressão Linear Múltipla)

$$\text{Hipóteses: } H_0 : \beta_j \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} c \quad \text{vs.} \quad H_1 : \beta_j \begin{matrix} < \\ \neq \\ > \end{matrix} c$$

$$\text{Estatística do Teste: } T = \frac{\hat{\beta}_j - \overbrace{\beta_j}^{=c}}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \sim t_{n-(p+1)} \quad \text{se } H_0 \text{ verdade}$$

Nível de significância do teste: α

Região Crítica (Região de Rejeição): **Rejeitar H_0 se**

$$\begin{array}{ll} T_{calc} < -t_{\alpha[n-(p+1)]} & \text{(Unilateral esquerdo)} \\ |T_{calc}| > t_{\alpha/2[n-(p+1)]} & \text{(Bilateral)} \end{array}$$

Testes de Hipóteses sobre os parâmetros

O mesmo resultado (acetato 184) usado para construir intervalos de confiança serve para construir testes a hipóteses para cada β_j individual.

Testes de Hipóteses a β_j (Regressão Linear Múltipla)

$$\text{Hipóteses: } H_0 : \beta_j \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} c \quad \text{vs.} \quad H_1 : \beta_j \begin{matrix} < \\ \neq \\ > \end{matrix} c$$

$$\text{Estatística do Teste: } T = \frac{\hat{\beta}_j - \overbrace{\beta_j}^{=c}}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \sim t_{n-(p+1)} \quad \text{se } H_0 \text{ verdade}$$

Nível de significância do teste: α

Região Crítica (Região de Rejeição): **Rejeitar H_0 se**

$$\begin{array}{ll} T_{calc} < -t_{\alpha[n-(p+1)]} & \text{(Unilateral esquerdo)} \\ |T_{calc}| > t_{\alpha/2[n-(p+1)]} & \text{(Bilateral)} \\ T_{calc} > t_{\alpha[n-(p+1)]} & \text{(Unilateral direito)} \end{array}$$

Combinações lineares dos parâmetros

Seja $\vec{a}^t = (a_0, a_1, \dots, a_p)$ um vector não aleatório em \mathbb{R}^{p+1} . O produto interno $\vec{a}^t \vec{\beta}$ define uma combinação linear dos parâmetros do modelo:

$$\vec{a}^t \vec{\beta} = a_0 \beta_0 + a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + \dots + a_p \beta_p .$$

Casos particulares importantes nas aplicações são:

- Se $\vec{a} = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{=a_j}, \dots, 0)$ (um único elemento não nulo, de valor 1, na posição $j + 1$), então $\vec{a}^t \vec{\beta} = \beta_j$.
- Se \vec{a} tem apenas dois elementos não nulos, 1 na posição $i + 1$ e ± 1 na posição $j + 1$, $\vec{a}^t \vec{\beta} = \beta_i \pm \beta_j$.
- Se $\vec{a} = (1, x_1, x_2, \dots, x_p)$, onde x_j indica um possível valor da variável preditora X_j , então $\vec{a}^t \vec{\beta}$ representa o **valor esperado de Y associado aos valores indicados das variáveis preditoras**:

$$\begin{aligned} \vec{a}^t \vec{\beta} &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p \\ &= E[Y | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_p = x_p] = \mu_{Y|\vec{x}}. \end{aligned}$$

Inferência sobre combinações lineares dos β_j s

Para estimar $\vec{\mathbf{a}}^t \vec{\boldsymbol{\beta}} = a_0\beta_0 + a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_p\beta_p$, usa-se o **estimador**:

$$\vec{\mathbf{a}}^t \vec{\hat{\boldsymbol{\beta}}} = a_0\hat{\beta}_0 + a_1\hat{\beta}_1 + a_2\hat{\beta}_2 + \dots + a_p\hat{\beta}_p .$$

A multinormalidade de $\vec{\hat{\boldsymbol{\beta}}}$ implica a normalidade de qualquer vector que seja combinação linear das suas componentes (acetato 175, ponto 4):

- Sabemos que $\vec{\hat{\boldsymbol{\beta}}} \sim \mathcal{N}_{p+1}(\vec{\boldsymbol{\beta}}, \sigma^2(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1})$ (acetato 179);
- Logo, $\vec{\mathbf{a}}^t \vec{\hat{\boldsymbol{\beta}}} \sim \mathcal{N}(\vec{\mathbf{a}}^t \vec{\boldsymbol{\beta}}, \sigma^2 \vec{\mathbf{a}}^t (\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1} \vec{\mathbf{a}})$ (acetato 175, ponto 4);
- Ou seja, $\mathbf{Z} = \frac{\vec{\mathbf{a}}^t \vec{\hat{\boldsymbol{\beta}}} - \vec{\mathbf{a}}^t \vec{\boldsymbol{\beta}}}{\sqrt{\sigma^2 \vec{\mathbf{a}}^t (\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1} \vec{\mathbf{a}}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$;
- Por um raciocínio análogo ao usado com os β s individuais, tem-se:

$$\frac{\vec{\mathbf{a}}^t \vec{\hat{\boldsymbol{\beta}}} - \vec{\mathbf{a}}^t \vec{\boldsymbol{\beta}}}{\sqrt{QMRE \cdot \vec{\mathbf{a}}^t (\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1} \vec{\mathbf{a}}}} \sim t_{n-(p+1)} .$$

Quantidade fulcral para a inferência sobre $\vec{a}^t \vec{\beta}$

Distribuições para combinações lineares dos β s

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla, tem-se

$$\frac{\vec{a}^t \hat{\vec{\beta}} - \vec{a}^t \vec{\beta}}{\hat{\sigma}_{\vec{a}^t \vec{\beta}}} \sim t_{n-(p+1)},$$

com $\hat{\sigma}_{\vec{a}^t \vec{\beta}} = \sqrt{QMRE \cdot \vec{a}^t (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \vec{a}}$.

Este resultado sustenta a construção de **intervalos de confiança** e **testes de hipóteses** para quaisquer combinações lineares dos parâmetros β_j do modelo.

NOTA: Repare-se na analogia da estrutura desta quantidade fulcral com os resultados anteriores, relativos a β_j s individuais.

Intervalo de confiança para $\vec{a}^t \vec{\beta}$

Intervalo de Confiança a $(1 - \alpha) \times 100\%$ para $\vec{a}^t \vec{\beta}$

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla, um intervalo a $(1 - \alpha) \times 100\%$ de confiança para a combinação linear dos parâmetros, $\vec{a}^t \vec{\beta} = a_0 \beta_0 + a_1 \beta_1 + \dots + a_p \beta_p$, é:

$$\left[\vec{a}^t \vec{b} - t_{\frac{\alpha}{2} [n-(p+1)]} \cdot \hat{\sigma}_{\vec{a}^t \vec{\beta}}, \vec{a}^t \vec{b} + t_{\frac{\alpha}{2} [n-(p+1)]} \cdot \hat{\sigma}_{\vec{a}^t \vec{\beta}} \right],$$

com $\vec{a}^t \vec{b} = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_p b_p$ e $\hat{\sigma}_{\vec{a}^t \vec{\beta}} = \sqrt{QMRE \cdot \vec{a}^t (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \vec{a}}$.

Testes de Hipóteses sobre os parâmetros

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla,

Testes de Hipóteses a $\vec{a}^t \vec{\beta}$ (Regressão Linear Múltipla)

Hipóteses: $H_0 : \vec{a}^t \vec{\beta} = c$ vs. $H_1 : \vec{a}^t \vec{\beta} \neq c$

Estatística do Teste: $T = \frac{\vec{a}^t \vec{\tilde{\beta}} - \overbrace{\vec{a}^t \vec{\beta}}^{=c} |_{H_0}}{\hat{\sigma}_{\vec{a}^t \vec{\beta}}} \sim t_{n-(p+1)} \quad \text{se } \vec{a}^t \vec{\beta} = c \quad (H_0)$

Nível de significância do teste: α

Região Crítica (Região de Rejeição): Rejeitar H_0 se

$$|T_{calc}| > t_{\frac{\alpha}{2}[n-(p+1)]} \quad (\text{Bilateral})$$

Testes de Hipóteses sobre os parâmetros

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla,

Testes de Hipóteses a $\vec{a}^t \vec{\beta}$ (Regressão Linear Múltipla)

Hipóteses: $H_0 : \vec{a}^t \vec{\beta} = c$ vs. $H_1 : \vec{a}^t \vec{\beta} \neq c$

Estatística do Teste: $T = \frac{\overbrace{\vec{a}^t \vec{\beta} - \vec{a}^t \vec{\beta}}^{=c} |_{H_0}}{\hat{\sigma}_{\vec{a}^t \vec{\beta}}} \sim t_{n-(p+1)} \quad \text{se } \vec{a}^t \vec{\beta} = c \quad (H_0)$

Nível de significância do teste: α

Região Crítica (Região de Rejeição): **Rejeitar H_0 se**

$$T_{calc} < -t_{\alpha[n-(p+1)]} \quad \text{(Unilateral esquerdo)}$$

$$|T_{calc}| > t_{\frac{\alpha}{2}[n-(p+1)]} \quad \text{(Bilateral)}$$

Testes de Hipóteses sobre os parâmetros

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla,

Testes de Hipóteses a $\vec{a}^t \vec{\beta}$ (Regressão Linear Múltipla)

$$\text{Hipóteses: } H_0 : \vec{a}^t \vec{\beta} \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} c \quad \text{vs.} \quad H_1 : \vec{a}^t \vec{\beta} \begin{matrix} < \\ \neq \\ > \end{matrix} c$$

$$\text{Estatística do Teste: } T = \frac{\overbrace{\vec{a}^t \vec{\beta} - \vec{a}^t \vec{\beta}}^{=c} |_{H_0}}{\hat{\sigma}_{\vec{a}^t \vec{\beta}}} \sim t_{n-(p+1)} \quad \text{se } \vec{a}^t \vec{\beta} = c \quad (H_0)$$

Nível de significância do teste: α

Região Crítica (Região de Rejeição): **Rejeitar H_0 se**

$$T_{calc} < -t_{\alpha[n-(p+1)]} \quad \text{(Unilateral esquerdo)}$$

$$|T_{calc}| > t_{\frac{\alpha}{2}[n-(p+1)]} \quad \text{(Bilateral)}$$

$$T_{calc} > t_{\alpha[n-(p+1)]} \quad \text{(Unilateral direito)}$$

De novo os casos particulares

No acetato 189 viram-se três casos particulares importantes de combinações lineares dos parâmetros.

- No caso de $\vec{a}^t \vec{\beta} = \beta_j$, os intervalos e testes obtidos são os já vistos nos acetatos 185 e 188.
- No caso de $\vec{a}^t \vec{\beta} = \beta_i \pm \beta_j$, tem-se $\hat{\sigma}_{\vec{a}^t \vec{\hat{\beta}}} = \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i \pm \hat{\beta}_j}$. Tem-se:


$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i \pm \hat{\beta}_j} = \sqrt{\widehat{V[\hat{\beta}_i \pm \hat{\beta}_j]}} = \sqrt{\widehat{V[\hat{\beta}_i]} + \widehat{V[\hat{\beta}_j]} \pm 2 \cdot \widehat{\text{Cov}[\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j]}}$$

As parcelas debaixo da raíz quadrada são elementos da **matriz estimada de (co-)variâncias do vector de estimadores $\vec{\hat{\beta}}$** :

$$\widehat{V[\vec{\hat{\beta}}]} = \text{QMRE} \cdot (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} .$$

ICs para combinações lineares no

Um intervalo de confiança para $\vec{a}^t \vec{\beta}$ precisa da matriz das (co)variâncias estimadas dos estimadores $\vec{\hat{\beta}}$, $V[\vec{\hat{\beta}}] = QMRE \cdot (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1}$.

No , esta matriz obtém-se através da função `vcov`.

De novo o exemplo dos lírios (`iris`)

```
> vcov(iris2.lm)
```

	(Intercept)	Petal.Length	Sepal.Length	Sepal.Width
(Intercept)	0.031815766	0.0015144174	-0.005075942	-0.002486105
Petal.Length	0.001514417	0.0005998259	-0.001065046	0.000802941
Sepal.Length	-0.005075942	-0.0010650465	0.002256837	-0.001344002
Sepal.Width	-0.002486105	0.0008029410	-0.001344002	0.002394932

O erro padrão estimado de $\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3$ é:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3} = \sqrt{0.002256837 + 0.002394932 + 2(-0.001344002)} = 0.04431439 .$$

Intervalos de confiança para $\mu_{Y|\vec{x}}$

Se a combinação linear dos β s que se deseja corresponde ao **valor esperado de Y** , dado um conjunto de valores das variáveis preditoras, isto é, a $\mu_{Y|\vec{x}} = E[Y|X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_p = x_p]$, então o intervalo de confiança do acetato 192 particulariza-se da seguinte forma:

$$\left] \hat{\mu}_{Y|\vec{x}} - t_{\frac{\alpha}{2} [n-(p+1)]} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\mu}_{Y|\vec{x}}} \quad , \quad \hat{\mu}_{Y|\vec{x}} + t_{\frac{\alpha}{2} [n-(p+1)]} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\mu}_{Y|\vec{x}}} \left[$$

sendo $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ o vector dos valores dos preditores,

$$\hat{\mu}_{Y|\vec{x}} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_p x_p \quad ,$$

e

$$\hat{\sigma}_{\hat{\mu}_{Y|\vec{x}}} = \sqrt{QMRE \cdot \vec{a}^t (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \vec{a}},$$

com

$$\vec{a} = (1, x_1, x_2, \dots, x_p) \quad .$$

Intervalos de confiança para $\mu_{Y|\vec{x}}$ no

É possível obter o intervalo de confiança referido no acetato anterior através do comando `predict`, tal como na RLS.

O exemplo dos lírios

Um IC a 95% para a largura esperada de pétalas de flores com:

Petal.Length=2

Sepal.Length=5

Sepal.Width=3.1

usa o vector $\vec{a} = (1, 2, 5, 3.1)^t$. No R:

```
> predict(iris2.lm, new=data.frame(Petal.Length=2, Sepal.Length=5,  
+ Sepal.Width=3.1), int="conf")
```

```
      fit      lwr      upr  
[1,] 0.462297 0.4169203 0.5076736
```

O IC para $E[Y|X_1=2, X_2=5, X_3=3.1]$ é: $\left[0.4169, 0.5077 \right]$.

Intervalos de predição para Y

Podem também obter-se, de forma análoga à RLS, **intervalos de predição para uma observação individual de Y** , associada aos valores das variáveis preditoras x_1, x_2, \dots, x_p .

Nestes intervalos, a estimativa da variância associada a uma observação individual de Y é acrescida em $QMRE$ unidades:

$$\left[\hat{\mu}_{Y|\vec{x}} - t_{\frac{\alpha}{2}} [n-(p+1)] \cdot \hat{\sigma}_{indiv} \quad , \quad \hat{\mu}_{Y|\vec{x}} + t_{\frac{\alpha}{2}} [n-(p+1)] \cdot \hat{\sigma}_{indiv} \right]$$


onde $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)^t$ indica o vector dos valores dos preditores e

$$\hat{\mu}_{Y|\vec{x}} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_px_p$$

e

$$\hat{\sigma}_{indiv} = \sqrt{QMRE \left[1 + \vec{a}^t (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \vec{a} \right]} \quad \text{com } \vec{a} = (1, x_1, x_2, \dots, x_p).$$

Intervalos de predição para Y no R

No , é possível obter um intervalo de predição através do comando `predict` com o argumento `int="pred"`, tal como na RLS.

O exemplo dos lírios (`iris`)

O intervalo de predição (95%) para a largura da pétala, num lírio com comprimento de pétala 2 e sépala de comprimento 5 e largura 3.1, é:

```
> predict(iris2.lm, data.frame(Petal.Length=2, Sepal.Length=5,  
+   Sepal.Width=3.1), int="pred")
```

```
      fit      lwr      upr  
[1,] 0.462297 0.08019972 0.8443942
```

O intervalo de predição pedido é:] 0.0802 , 0.8444 [.

Avaliando a qualidade do ajustamento global

Numa Regressão Linear Múltipla, com equação

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p + \varepsilon ,$$

o **Modelo Nulo** $Y = \beta_0 + \varepsilon$, corresponde a admitir que **todas** as variáveis preditoras têm **simultaneamente** coeficiente β_j nulo.

As hipóteses correspondentes à inexistência (H_0), ou existência (H_1), de relacionamento linear são:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$$

[MODELO = MODELO NULO ; INÚTIL]

vs.

$$H_1 : \exists j = 1, \dots, p \quad \text{t.q.} \quad \beta_j \neq 0$$

[MODELO \neq MODELO NULO]

NOTAS:

- **não** se pode decidir entre estas hipóteses através de p testes *t-Student* aos β_j individuais.
- β_0 não intervém nas hipóteses.

Distribuição associada a SQR

De novo, o ponto de partida para uma estatística de teste será a Soma de Quadrados associada à Regressão, $SQR = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$.

Distribuição associada a SQR, sob H_0

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla, tem-se $\frac{SQR}{\sigma^2} \sim \chi_p^2$, se $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$.

Quadrado Médio da Regressão (QMR)

Defina-se o **Quadrado Médio** associado à Regressão, $QMR = \frac{SQR}{p}$.

Distribuição associada a SQRE, sempre

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla, tem-se $\frac{SQRE}{\sigma^2} \sim \chi_{n-(p+1)}^2$.

A estatística do teste de ajustamento global

Prova-se que SQR e $SQRE$ são independentes. Logo, (veja também o acetato 117), se $\beta_j = 0, \forall i = 1 : p$, tem-se:

$$\left. \begin{array}{l} W = \frac{SQR}{\sigma^2} \sim \chi_p^2 \\ V = \frac{SQRE}{\sigma^2} \sim \chi_{n-(p+1)}^2 \\ W, V \text{ independentes} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{W/p}{V/n-(p+1)} = \frac{QMR}{QMRE} \sim F_{p, n-(p+1)} .$$

sendo $QMR = \frac{SQR}{p}$ e $QMRE = \frac{SQRE}{n-(p+1)}$.

Expressões alternativas no teste F global

A estatística do teste F de ajustamento global do modelo numa Regressão Linear Múltipla pode ser escrita na forma alternativa:

$$F = \frac{n - (p + 1)}{p} \cdot \frac{R^2}{1 - R^2} .$$

Tal como na Regressão Linear Simples, a estatística F é uma função crescente do Coeficiente de Determinação, R^2 .

As hipóteses do teste também se podem escrever como

$$H_0 : \mathcal{R}^2 = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mathcal{R}^2 > 0 .$$

A hipótese $H_0 : \mathcal{R}^2 = 0$ indica que, na população, o coeficiente de determinação é nulo.

Outra formulação do Teste F de ajustamento global

Teste F de ajustamento global do modelo RLM (alternativa)

Hipóteses: $H_0 : \mathcal{R}^2 = 0$ vs. $H_1 : \mathcal{R}^2 > 0$.

Estatística do Teste: $F = \frac{n-(p+1)}{p} \cdot \frac{R^2}{1-R^2} \sim F_{(p, n-(p+1))}$ sob H_0 .

Nível de significância do teste: α

Região Crítica (Região de Rejeição): Unilateral direita

Rejeitar H_0 se $F_{calc} > f_{\alpha(p, n-(p+1))}$

- A estatística F é uma função crescente do coeficiente de determinação amostral, R^2 .
- A hipótese nula $H_0 : \mathcal{R}^2 = 0$ corresponde a ausência de relação linear entre Y e o conjunto dos preditores (Modelo Nulo).

Modelos, submodelos e parcimónia na RLM

Dado um modelo de Regressão Linear Múltipla com ajustamento adequado, o **princípio da parcimónia** sugere saber se **será possível usar um modelo com menos variáveis preditoras, sem perder significativamente a qualidade de ajustamento.**

Considere um modelo de Regressão Linear Múltipla, com 5 preditores:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 .$$

Chamamos **submodelo** a um modelo de regressão linear múltipla contendo apenas alguns dos preditoras, e.g.,

$$Y = \beta_0 + \beta_2 x_2 + \beta_5 x_5 ,$$

O submodelo identifica-se pelo **conjunto \mathcal{S} das suas variáveis preditoras**. No exemplo, $\mathcal{S} = \{2, 5\}$.

O modelo e o submodelo são idênticos se $\beta_j = 0$ para qualquer variável x_j cujo índice **não** pertença a \mathcal{S} .

Modelos, submodelos e parcimónia na RLM

Dado um modelo de Regressão Linear Múltipla com ajustamento adequado, o **princípio da parcimónia** sugere saber se **será possível usar um modelo com menos variáveis preditoras, sem perder significativamente a qualidade de ajustamento.**

Considere um modelo de Regressão Linear Múltipla, com 5 preditores:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 .$$

Chamamos **submodelo** a um modelo de regressão linear múltipla contendo apenas alguns dos preditoras, e.g.,

$$Y = \beta_0 + \beta_2 x_2 + \beta_5 x_5 ,$$

O submodelo identifica-se pelo **conjunto \mathcal{S} das suas variáveis preditoras**. No exemplo, $\mathcal{S} = \{2, 5\}$.

O modelo e o submodelo são idênticos se $\beta_j = 0$ para qualquer variável x_j cujo índice **não** pertença a \mathcal{S} .

Modelos, submodelos e parcimónia na RLM

Dado um modelo de Regressão Linear Múltipla com ajustamento adequado, o **princípio da parcimónia** sugere saber se **será possível usar um modelo com menos variáveis preditoras, sem perder significativamente a qualidade de ajustamento.**

Considere um modelo de Regressão Linear Múltipla, com 5 preditores:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 .$$

Chamamos **submodelo** a um modelo de regressão linear múltipla contendo apenas alguns dos preditoras, e.g.,

$$Y = \beta_0 + \beta_2 x_2 + \beta_5 x_5 ,$$

O submodelo identifica-se pelo **conjunto \mathcal{S} das suas variáveis preditoras**. No exemplo, $\mathcal{S} = \{2, 5\}$.

O modelo e o submodelo são idênticos se $\beta_j = 0$ para qualquer variável x_j cujo índice **não** pertença a \mathcal{S} .

Modelos, submodelos e parcimónia na RLM

Dado um modelo de Regressão Linear Múltipla com ajustamento adequado, o **princípio da parcimónia** sugere saber se **será possível usar um modelo com menos variáveis preditoras, sem perder significativamente a qualidade de ajustamento.**

Considere um modelo de Regressão Linear Múltipla, com 5 preditores:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 .$$

Chamamos **submodelo** a um modelo de regressão linear múltipla contendo apenas alguns dos preditoras, e.g.,

$$Y = \beta_0 + \beta_2 x_2 + \beta_5 x_5 ,$$

O submodelo identifica-se pelo **conjunto \mathcal{S} das suas variáveis preditoras**. No exemplo, $\mathcal{S} = \{2, 5\}$.

O modelo e o submodelo são idênticos se $\beta_j = 0$ para qualquer variável x_j cujo índice **não** pertença a \mathcal{S} .

Comparando modelo e submodelos

Para comparar um modelo e um seu submodelo (identificado pelo conjunto \mathcal{S} dos índices das suas variáveis), precisamos de optar entre as hipóteses:

$$H_0 : \beta_j = 0, \quad \forall j \notin \mathcal{S} \quad \text{vs.} \quad H_1 : \exists j \notin \mathcal{S} \quad \text{tal que} \quad \beta_j \neq 0.$$

[SUBMODELO = MODELO]

[SUBMODELO \neq MODELO]

NOTA: Esta discussão só envolve coeficientes β_j de variáveis preditoras ($j > 0$). O coeficiente β_0 faz sempre parte dos submodelos e não é relevante do ponto de vista da parcimónia.

Caso não se rejeite H_0 , opta-se pelo submodelo (mais parcimonioso).

Caso se rejeite H_0 , opta-se pelo modelo completo (ajusta-se significativamente melhor).

Estatística de teste para comparar modelo/submodelo

A estatística de teste compara as Somas de Quadrados Residuais do:

- modelo completo (referenciado pelo índice C); e do
- submodelo (referenciado pelo índice S)

Seja k o número de preditores do submodelo ($k+1$ parâmetros). Tem-se, sob H_0 ($\beta_j = 0$, para todas as variáveis x_j que não estão no submodelo):

$$F = \frac{\frac{SQRE_S - SQRE_C}{p-k}}{\frac{SQRE_C}{n-(p+1)}} \sim F_{[p-k, n-(p+1)]},$$

Nota: Necessariamente $SQRE_S \geq SQRE_C$.

São os valores grandes da estatística que levantam dúvidas sobre H_0 .

Expressão alternativa para a estatística do teste

A estatística do teste F parcial pode ser escrita na forma alternativa:

$$F = \frac{n - (p + 1)}{p - k} \cdot \frac{R_C^2 - R_S^2}{1 - R_C^2}.$$

NOTA: A Soma de Quadrados Total apenas depende dos valores observados da variável resposta Y e não do modelo ajustado. Assim, **SQT é igual no modelo completo e no submodelo.**

As hipóteses do teste também se podem escrever como

$$H_0 : \mathcal{R}_C^2 = \mathcal{R}_S^2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mathcal{R}_C^2 > \mathcal{R}_S^2 ,$$

A hipótese H_0 indica que o grau de relacionamento linear entre Y e o conjunto dos preditores é idêntico no modelo e no submodelo.

Teste F parcial: formulação alternativa

Teste F de comparação dum modelo com um seu submodelo

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla,

Hipóteses:

$$H_0 : \mathcal{R}_C^2 = \mathcal{R}_S^2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mathcal{R}_C^2 > \mathcal{R}_S^2 .$$

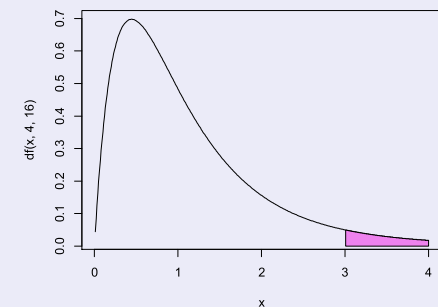
Estatística do Teste:

$$F = \frac{n-(p+1)}{p-k} \cdot \frac{R_C^2 - R_S^2}{1 - R_C^2} \sim F_{[p-k, n-(p+1)]}, \text{ sob } H_0 .$$

Nível de significância do teste: α

Região Crítica (Região de Rejeição): Unilateral direita

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } F_{\text{calc}} > f_{\alpha[p-k, n-(p+1)]}$$



O teste a submodelos no

Um teste F parcial efectua-se no  através da função `anova`, com dois argumentos: o modelo completo e o submodelo sob comparação.

O exemplo dos lírios

```
> anova(iris.lm, iris2.lm)
Analysis of Variance Table
Model 1: Petal.Width ~ Petal.Length
Model 2: Petal.Width ~ Petal.Length + Sepal.Length + Sepal.Width
  Res.Df    RSS   Df Sum of Sq    F    Pr(>F)
1     148 6.3101
2     146 5.3803   2    0.9298 12.616 8.836e-06 ***
```

O valor calculado da estatística é $F_{calc} = 12.616$.

O respectivo p -value é $p = 8.836 \times 10^{-6}$.

Rejeita-se a hipótese nula de igualdade de modelo e submodelo.

Relação entre os testes- t e o teste F parcial

Caso o modelo e submodelo difiram num único preditor X_j , o teste F parcial dos acetatos anteriores é equivalente ao teste t -Student (acetato 188) com as hipóteses $H_0 : \beta_j = 0$ vs. $H_1 : \beta_j \neq 0$.

Nesse caso:

- as hipóteses dos dois testes são iguais ($H_0 : \beta_j = 0$ vs. $H_1 : \beta_j \neq 0$);
- a estatística do teste F parcial é o quadrado da estatística do teste t referido:

$$F_{calc} = T_{calc}^2$$

Tem-se $p - k = 1$, e como é sabido, se uma variável aleatória T tem distribuição t_v , então o seu quadrado, T^2 tem distribuição $F_{1,v}$.

Como escolher um submodelo?

O teste F parcial (teste aos modelos encaixados) permite-nos optar entre um modelo e um seu submodelo. Um submodelo pode ser sugerido por:

- **razões de índole teórica**, sugerindo que determinadas variáveis preditoras não sejam, na realidade, importantes para influenciar os valores de Y .
- **razões de índole prática**, como a dificuldade, custo ou volume de trabalho associado à recolha de observações para determinadas variáveis preditoras.

Nestes casos, pode ser claro que submodelo(s) se deseja testar.

Nota: Veja-se o Exercício RLM 10 g) para um exemplo.

Como escolher um submodelo? (cont.)

Mas em muitas situações não é evidente qual o subconjunto de variáveis preditoras que se deseja considerar no submodelo. Pretende-se apenas ver se o modelo é simplificável. Nestes casos, a opção por um submodelo não é um problema fácil.

Dadas p variáveis preditoras, o número de subconjuntos, de qualquer cardinalidade, excepto 0 (modelo nulo) e p (o modelo completo) que é possível escolher é dado por $2^p - 2$. A tabela seguinte indica o número desses subconjuntos para $p = 5, 10, 15, 20, 30$.

p	$2^p - 2$
5	30
10	1 022
15	32 766
20	1 048 574
30	1 073 741 822

Cuidado com exclusões simultâneas de preditores

Para pequenos valores de p : é viável analisar todos os possíveis subconjuntos de preditores.

Para valores de p até $p \approx 35$: Com algoritmos e rotinas informáticas adequadas, ainda é possível pesquisar todos os subconjuntos.

Mas para p muito grande: uma pesquisa exaustiva é computacionalmente inviável.

Não é legítimo usar testes t à significância de cada β_j no modelo completo para decidir sobre a exclusão de vários preditores **em simultâneo**.

Um teste t a $\beta_j = 0$ parte do princípio que todas as restantes variáveis pertencem ao modelo. A exclusão de qualquer preditor altera os valores estimados b_j e respectivos erros padrão das variáveis que permanecem no submodelo. Pode acontecer que um preditor seja dispensável num modelo completo, mas deixe de o ser num submodelo, ou viceversa.

Um exemplo

Dados brix (Exercício RLM 2)

A tabela da regressão da variável *Brix* sobre todas as restantes é:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	6.08878	1.00252	6.073	0.000298	***
Diametro	1.27093	0.51219	2.481	0.038030	*
Altura	-0.70967	0.41098	-1.727	0.122478	
Peso	-0.20453	0.14096	-1.451	0.184841	
pH	0.51557	0.33733	1.528	0.164942	
Acucar	0.08971	0.03611	2.484	0.037866	*

Mas **não** é legítimo concluir que *Altura*, *Peso* e *pH* são **todas** dispensáveis.

```
> anova(brix2.lm,brix.lm)
```

```
Analysis of Variance Table
```

```
Model 1: Brix ~ Diametro + Acucar
```

```
Model 2: Brix ~ Diametro + Altura + Peso + pH + Acucar
```

	Res.Df	RSS	Df	Sum of Sq	F	Pr(>F)	
1	11	0.42743					
2	8	0.14925	3	0.27818	4.97	0.03104	*

Pesquisas completas

Para um número p de preditores não excessivo, e dispondo de algoritmos e rotinas informáticas adequadas, é possível efectuar uma pesquisa completa que assegure que se encontra o subconjunto de k preditores com o maior valor de R^2 (ou de algum outro critério de qualidade do submodelo).

O algoritmo *leaps and bounds*, de Furnival e Wilson ¹ é um algoritmo computacionalmente eficiente que permite identificar o melhor subconjunto de preditores, de uma dada cardinalidade k .

Uma rotina implementando o algoritmo encontra-se disponível no R, num módulo (*package*) de nome `leaps` (comando com o mesmo nome). Outra rotina análoga encontra-se na função `eleaps` do módulo `subselect`.

¹Furnival, G.W and Wilson, R.W.,Jr. (1974) Regressions by leaps and bounds, *Technometrics*, **16**, 499-511.

Um exemplo de aplicação da rotina leaps

A rotina *leaps* nos dados *brix*

Apesar do pequeno número de preditores, exemplifiquemos a aplicação da função *leaps* com os dados *brix* (Exercício RLM 2).

```
> colnames(brix)
[1] "Diametro" "Altura" "Peso" "Brix" "pH" "Acucar"

> library(leaps)      <-- carregar o módulo (tem de estar instalado)
> leaps(y=brix$Brix, x=brix[,-4], method="r2", nbest=1) <-- o comando: y resposta, x preditores

$which      <-- matriz de valores lógicos, indicando resultados (cada coluna um preditor,
             cada linha uma cardinalidade de subconjunto)
   1  2  3  4  5
1 FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE   <-- k=1 ; melhor preditor individual: Acucar
2 TRUE  TRUE FALSE FALSE FALSE   <-- k=2 ; melhor par de preditores: Diametro e Altura
3 TRUE  TRUE FALSE FALSE TRUE    <-- k=3 ; melhor trio de preditores: Diametro, Altura, Acucar
4 TRUE  TRUE FALSE TRUE  TRUE
5 TRUE  TRUE TRUE  TRUE  TRUE
[...]
```

```
$r2      <-- Coef. Determinação da melhor solução com o no. k=1,2,3,4,5 de preditores
[1] 0.5091325 0.6639105 0.7863475 0.8083178 0.8482525
```

Repare-se como o melhor submodelo (R^2 mais elevado) com dois preditores **não é** o submodelo com os preditores *Diametro* e *Acucar*, como sugerido pelos p -values do ajustamento do modelo completo.

Algoritmos de pesquisa sequenciais

Caso não esteja disponível *software* apropriado, ou se o número p de preditores for demasiado grande, pode recorrer-se a **algoritmos de pesquisa** que simplificam uma regressão linear múltipla **sem analisar todo os possíveis submodelos e sem a garantia de obter os melhores subconjuntos**.

Vamos considerar um **algoritmo** que, em cada passo, exclui uma **variável preditora**, até alcançar uma condição de paragem considerada adequada, ou seja, um **algoritmo de exclusão sequencial** (*backward elimination*).

Existem variantes deste algoritmo, não estudadas aqui:

- **algoritmo de inclusão sequencial** (*forward selection*).
- **algoritmos de exclusão/inclusão alternada** (*stepwise selection*).

O algoritmo de exclusão sequencial com testes aos β_j

- 1 ajustar o modelo completo, com os p preditores;
- 2 definir um nível de significância α para os testes de hipóteses a $\beta_j = 0$;
- 3 para todas as variáveis rejeita-se $H_0 : \beta_j = 0$?
 - ▶ **Se sim:** não é possível simplificar o modelo (passar ao ponto 4).
 - ▶ **Se não:** variáveis em que **não** se rejeita H_0 são dispensáveis (candidatas à exclusão).
 - ★ se apenas existe uma candidata a sair, **excluir essa variável**;
 - ★ se existir mais do que uma variável candidata a sair, **excluir a variável associada ao maior p -value** (isto é, ao valor da estatística t mais próxima de zero)

Reajustar o modelo após a exclusão da variável e repetir este ponto 3

- 4 Quando não existirem variáveis candidatas a sair, ou quando sobrar um único preditor, o algoritmo pára. Tem-se então o **submodelo final**.

Um exemplo – Exercício RLM 2

Dados brix: algoritmo de exclusão sequencial

Fixando o nível de significância $\alpha = 0.05$:

```
> summary(lm(Brix ~ Diametro + Altura + Peso + pH + Acucar, data=brix))
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	6.08878	1.00252	6.073	0.000298	***
Diametro	1.27093	0.51219	2.481	0.038030	*
Altura	-0.70967	0.41098	-1.727	0.122478	
Peso	-0.20453	0.14096	-1.451	0.184841	
pH	0.51557	0.33733	1.528	0.164942	
Acucar	0.08971	0.03611	2.484	0.037866	*

```
> summary(lm(Brix ~ Diametro + Altura + pH + Acucar, data=brix))
```


	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	6.25964	1.05494	5.934	0.000220	***
Diametro	1.40573	0.53373	2.634	0.027189	*
Altura	-1.06413	0.35021	-3.039	0.014050	* <- Passou a ser significativo (0.05)
pH	0.33844	0.33322	1.016	0.336316	
Acucar	0.08481	0.03810	2.226	0.053031	. <- Deixou de ser significativo (0.05)

```
> summary(lm(Brix ~ Diametro + Altura + Acucar, data=brix))
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	6.97183	0.78941	8.832	4.9e-06	***
Diametro	1.57932	0.50642	3.119	0.01090	*
Altura	-1.11589	0.34702	-3.216	0.00924	**
Acucar	0.09039	0.03776	2.394	0.03771	* <- Voltou a ser significativo (0.05)

O algoritmo pára aqui. Pode comparar-se o submodelo final com o modelo completo. através dum teste F parcial.

Critério de Informação de Akaike

O  disponibiliza funções para automatizar pesquisas sequenciais de submodelos, semelhantes à que aqui foi enunciada, mas em que o critério de exclusão duma variável em cada passo se baseia no **Critério de Informação de Akaike (AIC)**.

Critério de Informação de Akaike (AIC)

O AIC é uma medida geral da qualidade de ajustamento de modelos. No contexto duma Regressão Linear Múltipla com k variáveis preditoras, define-se como

$$AIC = n \cdot \ln \left(\frac{SQRE_k}{n} \right) + 2(k + 1) .$$

Nota: O AIC pode tomar valores negativos.

Interpretando o AIC

$$AIC = n \cdot \ln \left(\frac{SQRE_k}{n} \right) + 2(k + 1)$$

- a primeira parcela é função crescente de $SQRE_k$, i.e., quanto melhor o ajustamento, mais pequena a primeira parcela;
- a segunda parcela mede a complexidade do modelo ($k + 1$ é o número de parâmetros), pelo que quanto mais parcimonioso o modelo, mais pequena a segunda parcela.

Assim, o AIC depende simultaneamente da qualidade do ajustamento e da simplicidade do modelo.

Um modelo para a variável resposta Y é considerado **melhor** que outro se tiver um **AIC menor** (quando ajustados com os mesmos dados).

Algoritmo de exclusão sequencial com base no AIC

Pode definir-se um algoritmo de exclusão sequencial, com base no critério AIC:

- ajustar o modelo completo e calcular o respectivo AIC.
- ajustar cada submodelo com menos **uma** variável e calcular o respectivo AIC.
- Se nenhum dos AICs dos submodelos considerados for inferior ao AIC do modelo anterior, o algoritmo termina sendo o modelo anterior o modelo final.

Caso alguma das exclusões reduza o AIC, efectua-se a exclusão que mais reduz o AIC e regressa-se ao ponto anterior.

Algoritmos de exclusão sequencial no

A função `step` corre o algoritmo de exclusão sequencial, com base no AIC.

Dados `brix` (Exercício 2 RLM)

```
> brix.lm <- lm(Brix ~ Diametro + Altura + Peso + pH + Acucar, data=brix)
> step(brix.lm, dir="backward")
Start:   AIC=-51.58          <-- AIC negativo
Brix ~ Diametro + Altura + Peso + pH + Acucar
      Df Sum of Sq   RSS   AIC
<none>          0.14925 -51.576 <-- modelo original com AIC menor
- Peso          1  0.039279  0.18853 -50.306 <-- modelo sem Peso em 2o. lugar
- pH            1  0.043581  0.19284 -49.990
- Altura       1  0.055631  0.20489 -49.141
- Diametro     1  0.114874  0.26413 -45.585
- Acucar       1  0.115132  0.26439 -45.572
```

Os vários modelos ensaiados são ordenados por ordem crescente de AIC. Neste caso, **não se exclui qualquer variável**: o AIC do modelo inicial é inferior ao de qualquer submodelo resultante de excluir uma variável. O submodelo final é o modelo inicial.

As duas variantes dos algoritmos

Os algoritmos de exclusão sequencial baseados nos testes t ou no AIC coincidem nas variáveis a excluir, podendo diferir apenas no momento de paragem.

Em geral, um algoritmo de exclusão sequencial baseado no AIC é mais cauteloso na exclusão, sobretudo se o valor de α usado nos testes t for baixo. Nos algoritmos baseados nos testes t , é aconselhável usar valores mais elevados de α , como $\alpha = 0.10$.

Um algoritmo de exclusão sequencial não garante a identificação do “melhor submodelo” com um dado número de preditores. Apenas identifica, de forma computacionalmente ligeira, submodelos “bons”.

Deve ser usado com bom senso e o submodelo obtido cruzado com outras considerações (e.g., o custo ou dificuldade de obtenção de cada variável, ou o papel que a teoria relativa ao problema em questão reserva a cada preditor).

O R^2 modificado

- O Coeficiente de Determinação usual:

$$R^2 = \frac{SQR}{SQT} = 1 - \frac{SQRE}{SQT}$$

- O R^2 modificado (definindo $QMT = \frac{SQT}{n-1} = s_y^2$):

$$R_{mod}^2 = 1 - \frac{QMRE}{QMT} = 1 - \frac{SQRE}{SQT} \cdot \frac{n-1}{n-(p+1)} = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{n-1}{n-(p+1)}.$$

Tem-se sempre $n-1 > n-(p+1)$, pelo que: $R_{mod}^2 < R^2$.

Se $n \gg p+1$ tem-se: $R^2 \approx R_{mod}^2$.

Se n é pouco maior que o número de variáveis preditoras: $R_{mod}^2 \ll R^2$
(excepto quando R^2 for muito próximo de 1).

O R^2 modificado (cont.)

R_{mod}^2 penaliza modelos complexos ajustados com poucas observações.

Exemplo: dados brix ($n=14$ e $p+1=6$)

```
> summary(brix.lm)
[...]  
Multiple R-squared: 0.8483, Adjusted R-squared: 0.7534
```

Um submodelo pode ter R_{mod}^2 maior que um modelo completo.

Exemplo: dados milho (Exercício RLM 10)

(tb. ilustra o uso do R_{mod}^2 como critério de selecção na função de pesquisa leaps):

```
> library(leaps)
> leaps(y=milho$y , x=milho[,-10], method="adjr2", nbest=1)
[...]  
$adjr2      <-- o maior R2 modificado é no submodelo com k=4 preditores  
[1] 0.5493014 0.6337329 0.6544835 0.6807418 0.6798986 0.6779395 0.6745412  
[8] 0.6633467 0.6488148
```

Regressão Polinomial

Um caso particular de relação não-linear, mesmo que envolvendo apenas uma variável preditora e a variável resposta, pode ser facilmente tratada no âmbito duma regressão linear múltipla: o caso de **relações polinomiais** entre Y e um ou mais preditores.

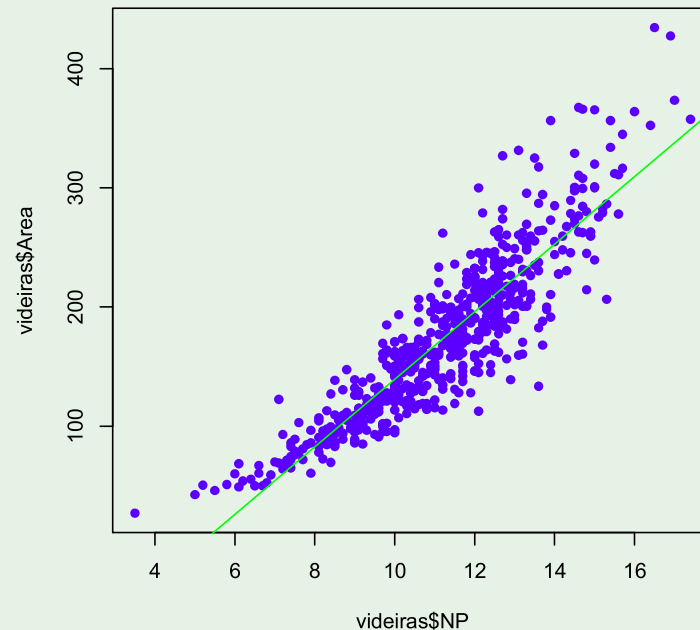
Considere-se, por exemplo, que a relação de fundo entre uma variável resposta Y e **uma única** variável preditora X é dada por uma parábola, de equação:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 .$$

Regressão Polinomial - Exemplo

Exemplo: folhas de videira (Exercício RLM 9)

Eis o gráfico das áreas vs. comprimentos de nervuras principais, com sobreposta a recta de regressão:



Há uma tendência para curvatura. Talvez um polinómio de 2º grau?

Regressão Polinomial - Exemplo (cont.)

A parábola de equação $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ pode ser vista como a equação duma regressão linear entre Y e as variáveis $X_1 = X$ e $X_2 = X^2$:

Dados videiras (Exercício RLM 9)

```
> summary(lm(Area ~ NP + I(NP^2), data=videiras))
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	7.5961	22.0431	0.345	0.731
NP	-0.2172	4.0125	-0.054	0.957
I(NP^2)	1.2941	0.1801	7.187	1.98e-12 ***

--

Residual standard error: 28.86 on 597 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.8162, Adjusted R-squared: 0.8155

F-statistic: 1325 on 2 and 597 DF, p-value: < 2.2e-16

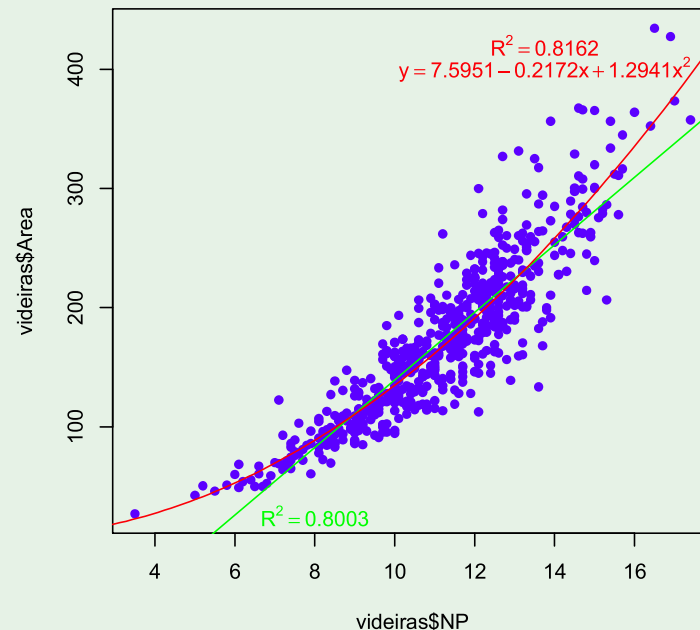
A equação da parábola ajustada é $y = 7.5961 - 0.2172x + 1.2941x^2$.

A rejeição da hipótese $\beta_2 = 0$ diz que a parábola ajusta-se significativamente melhor do que uma recta de regressão.

Regressão Polinomial - Exemplo (cont.)

Dados videiras (Exercício RLM 9)

Eis a parábola ajustada:



É legítimo afirmar que este modelo de regressão quadrático explica 81.62% da variabilidade nas áreas foliares observadas, uma vez que **não houve** transformação da variável resposta Y .

Regressões Polinomiais (cont.)

O argumento é extensível a qualquer polinómio de qualquer grau, e em qualquer número de variáveis. Dois exemplos:

- Polinómio de grau p numa variável

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \underbrace{x}_{=x_1} + \beta_2 \underbrace{x^2}_{=x_2} + \beta_3 \underbrace{x^3}_{=x_3} + \dots + \beta_p \underbrace{x^p}_{=x_p}$$

- Polinómio de grau 2 em 2 variáveis

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \underbrace{x}_{=x_1} + \beta_2 \underbrace{x^2}_{=x_2} + \beta_3 \underbrace{z}_{=x_3} + \beta_4 \underbrace{z^2}_{=x_4} + \beta_5 \underbrace{xz}_{=x_5}$$

Análise de Resíduos e outros diagnósticos

Uma regressão linear não fica completa sem a validação do modelo.

Grande parte do que se disse sobre resíduos na Regressão Linear Simples mantém-se válido numa Regressão Linear Múltipla.

Relembrar três conceitos relacionados, mas diferentes:

Erros aleatórios (desconhecidos)

$$\varepsilon_i = Y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots + \beta_p x_{p(i)})$$

Resíduos (variáveis aleatórias - preditores dos erros aleatórios)

$$E_i = Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1(i)} + \hat{\beta}_2 x_{2(i)} + \dots + \hat{\beta}_p x_{p(i)})$$

Resíduos (valores observados)

$$e_i = y_i - (b_0 + b_1 x_{1(i)} + b_2 x_{2(i)} + \dots + b_p x_{p(i)})$$

Propriedades dos Resíduos sob o Modelo RLM

O modelo de Regressão Linear Múltipla admite que

$$\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \forall i = 1, \dots, n .$$

Em notação vectorial, o **vector dos n resíduos** $E_i = Y_i - \hat{Y}_i$ é dado por:

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{Y}} - \vec{\hat{\mathbf{Y}}} = \vec{\mathbf{Y}} - \mathbf{H}\vec{\mathbf{Y}} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\vec{\mathbf{Y}} .$$

Distribuição do vector dos Resíduos no modelo RLM

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla, tem-se:

$$\vec{\mathbf{E}} \sim \mathcal{N}_n(\vec{\mathbf{0}}, \sigma^2(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})) \quad \text{sendo} \quad \vec{\mathbf{E}} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\vec{\mathbf{Y}} .$$

Propriedades dos Resíduos sob o Modelo RLM (cont.)

Sabemos que $\vec{Y} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{X}\vec{\beta}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$. Logo, vector dos resíduos $\vec{E} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\vec{Y}$:

- tem distribuição **Multinormal**
(é da forma $\mathbf{B}\vec{Y}$, com $\mathbf{B} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})$ não aleatória);
- tem vector esperado:

$$E[\vec{E}] = E[(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\vec{Y}] = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})E[\vec{Y}] = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{X}\vec{\beta} = \vec{0},$$

pois o vector $\mathbf{X}\vec{\beta} \in \mathcal{C}(\mathbf{X})$, logo permanece invariante sob a acção da matriz de projecção \mathbf{H} : $\mathbf{H}\mathbf{X}\vec{\beta} = \mathbf{X}\vec{\beta}$;

- tem matriz de covariâncias:

$$V[\vec{E}] = V[(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\vec{Y}] = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})V[\vec{Y}](\mathbf{I}_n - \mathbf{H})^t = \sigma^2(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}),$$

porque a matriz de projecção ortogonal é (Exercício RLM 4) **simétrica** ($\mathbf{H}^t = \mathbf{H}$) e **idempotente** ($\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}\mathbf{H} = \mathbf{H}$).

Propriedades dos Resíduos sob o Modelo RLM (cont.)

Distribuição dos Resíduos

Sob o modelo RLM, os **resíduos** têm a seguinte distribuição:

$$E_i \sim \mathcal{N} \left(0, \sigma^2 (1 - h_{ii}) \right) \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

onde h_{ij} é o i -ésimo elemento diagonal da matriz $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t$ de projecção ortogonal sobre o subespaço $\mathcal{C}(\mathbf{X})$.

Logo, E_i Normal, com $E[E_i] = 0$ e $V[E_i] = \sigma^2 (1 - h_{ii})$.

Embora no modelo RLM os erros aleatórios sejam independentes, **os resíduos não são variáveis aleatórias independentes**, pois as covariâncias entre resíduos diferentes são (em geral), não nulas:

$$\text{cov}[E_i, E_j] = -\sigma^2 h_{ij}, \quad \text{se } i \neq j,$$

onde h_{ij} indica o elemento da linha i e coluna j da matriz \mathbf{H} .

Vários tipos de resíduos

Tal como na RLS, definem-se diferentes tipos de resíduos:

Dois tipos de resíduos (também na RLM)

Resíduos habituais : $E_j = Y_j - \hat{Y}_j$;

Resíduos (internamente) estandardizados : $R_j = \frac{E_j}{\sqrt{QMRE(1-h_{jj})}}$.

Tal como para a RLS, também em regressões múltiplas se avalia a validade dos pressupostos do modelo através de **gráficos de resíduos**.

Estes gráficos são agora **mais importantes do que na RLS**, dada a impossibilidade de visualização de nuvens de pontos em espaços de alta dimensionalidade.

Análise dos resíduos

Os gráficos mais usuais são os já considerados na RLS e a sua leitura faz-se de forma análoga:

- **gráfico de E_i s vs. \hat{Y}_i s**: os pontos devem-se dispor numa banda horizontal, centrada no valor zero, sem outro padrão especial.
- **qq-plot dos resíduos estandardizados vs. distribuição Normal**: a Normalidade dos erros aleatórios corresponde à linearidade.
- **gráfico de resíduos vs. ordem de observação**: para investigar eventuais faltas de independência dos erros aleatórios.

Outras ferramentas de diagnóstico visam identificar observações individuais que merecem ulterior análise, tal como na RLS. Mas importa **adaptar as definições ao contexto de Regressão Múltipla**.

O efeito alavanca

Efeito alavanca

Numa RLM o **valor de efeito alavanca** (*leverage*) é o valor h_{ii} do elemento diagonal da matriz de projecção ortogonal \mathbf{H} , correspondente à observação i

- tem-se $\frac{1}{n} \leq h_{ii} \leq 1$;
- o **valor médio** das observações alavanca numa RLM é a **razão** entre o número de parâmetros e o número de observações:

$$\bar{h} = \frac{p + 1}{n} .$$

Gráficos de diagnóstico

Distância de Cook

A **distância de Cook** para avaliar a **influência da observação i** define-se agora como:

$$D_i = \frac{\sum_{j=1}^n [\hat{y}_j - \hat{y}_{j(-i)}]^2}{(p+1) QMRE},$$

onde $\hat{y}_{j(-i)}$ é o j -ésimo valor ajustado sem a observação i .

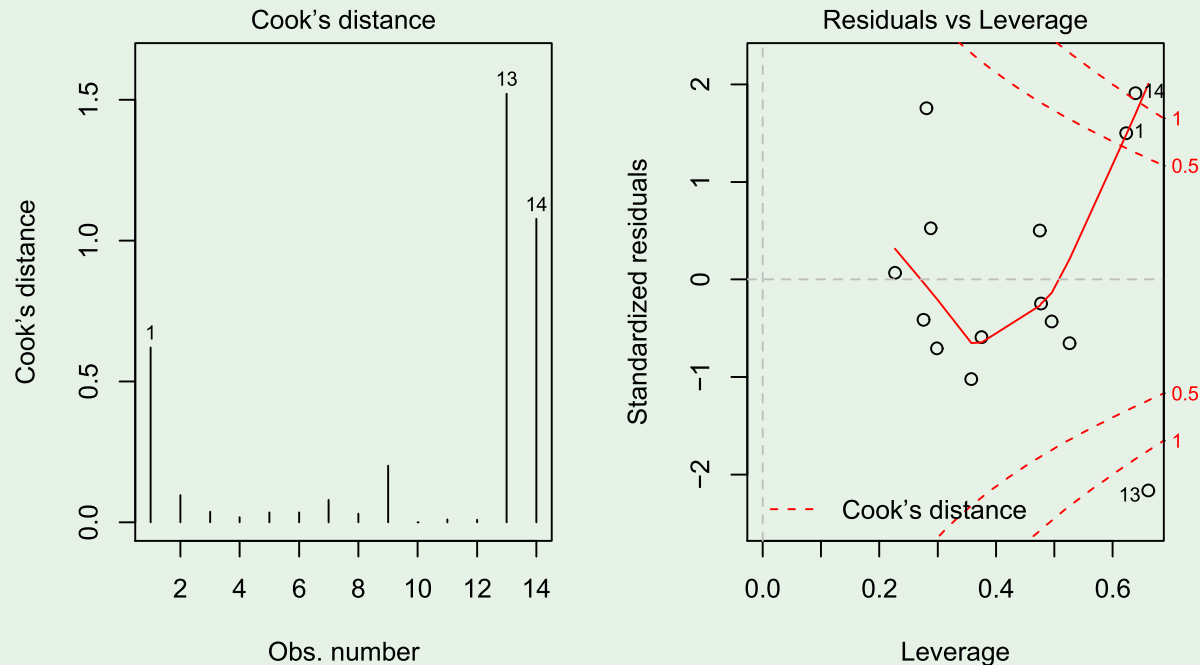
Alternativamente (sendo R_i o correspondente resíduo estandardizado):

$$D_i = R_i^2 \left(\frac{h_{ii}}{1 - h_{ii}} \right) \frac{1}{p+1}.$$

Os restantes aspectos da discussão são análogos aos duma RLS.

Um exemplo de gráficos de diagnóstico

Dados brix (Exercício RLM 2)



Os valores bastante grandes de distância de Cook e efeito alavanca h_{ij} neste exemplo reflectem o reduzido número de observações ($n = 14$) usado para ajustar um modelo com muitos parâmetros ($p + 1 = 6$).

Advertências finais

1. Podem surgir problemas de **multicolinearidade** das variáveis preditoras: as colunas da matriz \mathbf{X} serem (quase) linearmente dependentes. Nesse caso:
 - haverá **problemas no cálculo de $(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}$** , logo no ajustamento do modelo e na estimação dos parâmetros;
 - podem existir **variâncias muito grandes de alguns $\hat{\beta}_i$ s**, o que significa muita instabilidade na inferência.

Multicolinearidade reflecte redundância de informação nos preditores.

É possível eliminar multicolinearidade (exacta ou aproximada) excluindo da análise uma ou mais variáveis preditoras que sejam responsáveis pela (quase) dependência linear dos preditores.

Advertências finais (cont.)

2. Tal como na RLS, podem ser usadas transformações da variável resposta e uma ou mais variáveis preditoras.

São úteis transformações que linearizem uma relação não linear entre Y e X_1, X_2, \dots, X_p . Tais **transformações linearizantes** permitem estudar relações não lineares através de **relações lineares** entre as variáveis transformadas.

E.g., uma relação não linear entre y , x_1 e x_2 , da forma:

$$y = ax_1^b x_2^c$$

torna-se, após logaritmização, numa relação linear entre $\ln(y)$, $\ln(x_1)$ e $\ln(x_2)$ (com $b_0 = \ln(a)$, $b_1 = b$ e $b_2 = c$):

$$\ln(y) = \ln(a) + b \ln(x_1) + c \ln(x_2) = b_0 + b_1 \ln(x_1) + b_2 \ln(x_2) .$$

Nota: Os **erros aleatórios** aditivos, com os pressupostos usuais, devem ser válidos após as transformações linearizantes.